

УДК 532.529:538.65

ВЛИЯНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ОСЕДАНИЕ АГРЕГИРУЮЩИХ СЛАБОНАМАГНИЧИВАЮЩИХСЯ ЧАСТИЦ

СИВАКОВА Н. Н.

Исследование оседания слабонамагничивающихся частиц представляет интерес с точки зрения многих задач физического и биологического эксперимента, в том числе в связи с проблемой влияния магнитного поля на реакцию оседания эритроцитов (РОЭ). Многочисленные экспериментальные работы по влиянию магнитного поля на оседание эритроцитов, где используются самые разные поля, дают противоречивые результаты, которые не имеют строгого теоретического объяснения [1, 2]. На практическую возможность магнитной седиментации, сравнимой по скорости с гравитационной, указывалось в теоретических [3] и экспериментальных [4] работах. Модель оседания немагнитных агрегирующих частиц построена в [5]; ниже дано ее обобщение на случай слабой намагничиваемости частиц и приведены примеры анализа некоторых задач.

1. Рассмотрим суспензию, состоящую из несжимаемой ньютоновской жидкости (фаза 1) и взвешенных в ней несжимаемых слабонамагничивающихся частиц (фаза 2), способных при столкновениях образовывать агрегаты. Процесс агрегации опишем уравнениями баланса для числовой концентрации N агрегатов (включая одиночные частицы). Уравнения баланса массы, импульсов фаз и концентрации агрегатов имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho^\alpha}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho^\alpha \mathbf{V}^\alpha) &= 0 \\ \frac{d_\alpha}{dt}(\rho^\alpha \mathbf{V}^\alpha) + \rho^\alpha \mathbf{V}^\alpha \operatorname{div} \mathbf{V}^\alpha &= -\operatorname{div} \mathbf{P}^\alpha + \mathbf{R}^\alpha + \mathbf{F}^\alpha + \mathbf{Q}^\alpha \\ \frac{d_\alpha}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V}^\alpha \nabla), \quad \alpha = 1, 2 \\ \frac{\partial N}{\partial t} + \operatorname{div}(N \mathbf{V}^1) &= G \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь \mathbf{V}^α — векторы скоростей фаз; \mathbf{R}^α — силы межфазового взаимодействия; \mathbf{P}^α — тензоры напряжений фаз; ρ^α — плотности фаз, вычисленные в расчете на единицу объема пространства; \mathbf{F}^α — силы, действующие на фазы со стороны магнитного поля; \mathbf{Q}^α — внешние силы; G — скорость образования агрегатов, зависящая от их концентрации.

Вводя объемную концентрацию частиц в суспензии C , уравнения баланса массы фаз запишем в виде

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \operatorname{div}(C \mathbf{V}^1) = 0 \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[C \mathbf{V}^1 + (1-C) \mathbf{V}^2] &= 0 \\ \rho^1 &= C \rho_s, \quad \rho^2 = (1-C) \rho_f \end{aligned} \tag{1.3}$$

где ρ_s, ρ_f — истинные плотности частиц и жидкости.

Выражения для компонент P^1, P^2, R^1, R^2 из термодинамических соотношений без учета деформационных и температурных явлений и перекрестных эффектов можно представить в виде [6]

$$P^1 = pC\delta - a^1 e^1 - b^1 \delta \operatorname{div} V^1, \quad (1.4)$$

$$P^2 = p(1-C)\delta - a^2 e^2 - b^2 \delta \operatorname{div} V^2$$

$$R^1 = -R^2 = -D(V^1 - V^2) + p \nabla C \quad (1.5)$$

Здесь e^1, e^2 — тензоры скоростей деформаций фаз; δ — единичный тензор; D, a^1, a^2, b^1, b^2 — феноменологические коэффициенты, p — давление.

В общем случае магнитная проницаемость суспензии есть функция трех параметров: $\mu = \mu(C, H, T)$, где H — напряженность магнитного поля, T — температура суспензии. Учитывая, что частицы слабомагнитные, для термостатированной системы примем $\mu = \mu(C)$. Тогда магнитные силы, действующие на фазы, будут определяться некоторыми эффективными параметрами χ_1, χ_2 , выражающимися через истинные магнитные восприимчивости вещества частиц χ_s и жидкости χ_f

$$\chi_1 = C\chi_s, \quad \chi_2 = (1-C)\chi_f \quad (1.6)$$

Эффективные магнитные проницаемости веществ определим обычным образом: $\mu_1 = 1 + 4\pi\chi_1, \mu_2 = 1 + 4\pi\chi_2$. Будем считать частицы непроводящими, а жидкость — слабым проводником типа морской воды. Пондеромоторная сила в этом случае имеет вид [7]

$$F = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{H} - \frac{1}{4\pi} \nabla \left[\int_0^H \left(\mu - C \left(\frac{\partial \mu}{\partial C} \right) \right) H dH \right] \quad (1.7)$$

где \mathbf{B} — индукция магнитного поля. Пренебрегая индуцированным магнитным полем (суспензия слабопроводящая и $\operatorname{Re}_m \ll 1$) и магнитным взаимодействием частиц (поскольку $\chi_s \ll 1$), запишем (1.7) с учетом (1.3), (1.6) через внешнее магнитное поле H_0

$$F^\alpha = \chi_\alpha \nabla \frac{H_0^2}{2}, \quad \alpha = 1, 2 \quad (1.8)$$

Выражения для феноменологических коэффициентов D и G следуют из теории размерностей; согласно [5]

$$D = \alpha \eta w^3 \psi(C), \quad G = -kN^2, \quad w = \frac{C}{N} \quad (1.9)$$

где α — постоянная, характеризующая геометрическую форму агрегатов; w — средний объем агрегата; η — вязкость жидкости; k — размерная постоянная, характеризующая скорость образования агрегатов; $\psi(C)$ — эмпирическая функция, характеризующая стесненность обтекания агрегатов. Функция $\psi(C)$ при $C \rightarrow 1$ должна монотонно расти, а при $C \rightarrow 0$ $\psi(C) \rightarrow 1$. Положим $\psi(C) = (1-C)^{-1}$ на основе известных из литературы данных о зависимости скорости оседания от концентрации частиц.

Вообще говоря, в магнитном поле будет происходить дополнительная агрегация частиц (по сравнению с гравитационным оседанием) в связи с наличием магнитных сил, направленных радиально к оси трубки, и с намагничиванием частиц. Поэтому величина G должна зависеть от безразмерных параметров, характеризующих поле. Здесь эта зависимость не рассматривается, поскольку полагается, что F_r/F_x — малая величина. Выражение для G (1.9) из [5] позволяет сравнить результаты магнитной и гравитационной седиментации.

2. Рассмотрим оседание частиц суспензии в трубке радиуса R и длины $L \gg R$, помещенной во внешнее магнитное поле $\mathbf{H}_0 = H_r(x, r) \mathbf{e}_r + H_x(x, r) \mathbf{e}_x$ и поле силы тяжести $\mathbf{Q} = g \mathbf{e}_x$. Ось x направлена вдоль трубки вертикально

вниз, верхний конец трубки имеет координату $x=0$. Первоначально среда покоится и представляет собой идеально перемешанную суспензию одиночных частиц ($N=N_{\max}$) с постоянной по высоте трубки концентрацией C_0 . В заданном поле сил будет происходить осесимметричное движение, столкновение и слипание частиц в агрегаты. Распад агрегатов и запыряние в них части жидкости не учитываются.

В выбранной цилиндрической системе координат уравнения (1.1) с учетом (1.4), (1.5), (1.8) при $a^1, a^2, b^1, b^2 = \text{const}$ примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} Cu^1 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r Cv^1 &= 0 & (2.1) \\ \frac{\partial}{\partial x} [Cu^1 + (1-C)u^2] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r [Cv^1 + (1-C)v^2] &= 0 \\ \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} Nu^1 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} Nv^1 &= G \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho^\alpha v^\alpha + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \rho^\alpha v^\alpha v^\alpha + \frac{\partial}{\partial x} \rho^\alpha v^\alpha u^\alpha &= -C^\alpha \frac{\partial p}{\partial r} + a^\alpha \left[\frac{\partial^2 v^\alpha}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v^\alpha}{\partial r} + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial^2 v^\alpha}{\partial x^2} - \frac{v^\alpha}{r^2} \right] + \left(b^\alpha + \frac{a^\alpha}{3} \right) \left[\frac{\partial^2 v^\alpha}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v^\alpha}{\partial r} - \frac{v^\alpha}{r^2} + \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial r \partial x} \right] - \\ &- D(v^\alpha - v^\beta) + \chi_\alpha \Psi_r \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho^\alpha u^\alpha + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \rho^\alpha u^\alpha v^\alpha + \frac{\partial}{\partial x} \rho^\alpha u^\alpha u^\alpha &= -C^\alpha \frac{\partial p}{\partial x} + a^\alpha \left[\frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u^\alpha}{\partial r} + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial x^2} \right] + \rho^\alpha g + \left(b^\alpha + \frac{a^\alpha}{3} \right) \left[\frac{\partial^2 v^\alpha}{\partial x \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v^\alpha}{\partial x} + \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial x^2} \right] - D(u^\alpha - u^\beta) + \chi_\alpha \Psi_x \\ (v^\alpha, u^\alpha) = V^\alpha, \quad \Psi = (\Psi_r, \Psi_x) &= \left(\frac{1}{2} \frac{\partial H^2}{\partial r}, \frac{1}{2} \frac{\partial H^2}{\partial x} \right), \quad H^2 = H_r^2 + H_x^2 \\ \alpha = 1, 2, \quad \beta = 2/\alpha; \quad C^1 = C, \quad C^2 = 1-C \end{aligned}$$

Предположим, что частицы и жидкость имеют близкие плотности, а внешние силы по величине достаточно малы, так что осуществляется стоксово обтекание частиц, и практически сразу после начала седиментации частиц устанавливается квазистационарное движение. Тем самым пренебрегаем начальным ускорением частиц и силами инерции по сравнению с вязкими.

Проведем оценки в уравнениях (2.1), предполагая, что $a^1 \sim a^2 \sim b^1 \sim b^2 \sim \eta$, и принимая $C=0,5$. Используя связанные с геометрией задачи дополнительные упрощения $R \ll L$, $v^\alpha \ll u^\alpha$, $\partial V/\partial r \ll \partial V/\partial x$ и предполагая при этом $v/u \sim R/L$, отбросим малые слагаемые. Условие малости оставшихся производных от компонент скоростей фаз $w^{\text{н}}/(R^2 \alpha C \psi(C)) \ll 1$ выполняется, так как $w^{\text{н}} \ll R$ и $\alpha C \psi(C) = \alpha C (1-C)^{-\gamma}$, где $\gamma > 0$, причем независимо от формы частиц $\alpha \sim 1$, $\gamma \sim 1$ и поэтому $\alpha C \psi(C) \sim 1$ при $C=0,5$. Тогда из системы (2.1) следует:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} Cu^1 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r Cv^1 &= 0 & (2.2) \\ \frac{\partial}{\partial x} [Cu^1 + (1-C)u^2] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r [Cv^1 + (1-C)v^2] &= 0 \\ C^\alpha \frac{\partial p}{\partial r} = \chi_\alpha C^\alpha \Psi_r - D(v^\alpha - v^\beta), \quad \alpha = 1, 2, \quad \beta = \frac{2}{\alpha} \\ C^\alpha \frac{\partial p}{\partial x} = \chi_\alpha C^\alpha \Psi_x - D(u^\alpha - u^\beta) + \rho^\alpha g \end{aligned}$$

Из (2.2) для неизвестных v^i , u^i , C получаем систему квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка

$$\begin{aligned}
 & (\chi_s - \chi_l) \left[\Psi_x \frac{\partial C}{\partial r} - \Psi_r \frac{\partial C}{\partial x} \right] + [C\chi_s + (1-C)\chi_l] \times \\
 & \quad \times \left(\frac{\partial \Psi_x}{\partial r} - \frac{\partial \Psi_r}{\partial x} \right) + g(\rho_s - \rho_l) \frac{\partial C}{\partial r} = 0 \quad (2.3) \\
 & \frac{\partial C}{\partial t} + u^i \frac{\partial C}{\partial x} + v^i \frac{\partial C}{\partial r} = C \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{C}{r} \frac{\partial}{\partial r} rB \\
 & \frac{\partial u^i}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r v^i = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} rB \\
 & A = -C(1-C)^2 (\chi_s - \chi_l) \Psi_x + (\rho_s - \rho_l) g D^{-1}, \\
 & B = -C(1-C)^2 (\chi_s - \chi_l) \Psi_r D^{-1}
 \end{aligned}$$

Из этой системы, задавая начальные и краевые условия, можно определить движение фаз в переменных (t, r, x) и динамику изменения концентрации $C(t, r, x)$.

3. Задачу о седиментации частиц в тонкой длинной трубке рассмотрим в квазидномерном приближении. Для этого уравнения (2.2) осредним по сечению трубки, полагая, поскольку движение осесимметричное

$$\langle f \rangle = \frac{2}{R^2} \int_0^R r f dr$$

Предположим, что в процессе движения концентрация C постоянна вдоль r , т. е. оседание происходит без образования скоплений по сечению трубки. Тогда при осреднении в (2.2) произведений типа $Cf(r)$ можно считать, что $\langle f_1 f_2 \rangle = \langle f_1 \rangle \langle f_2 \rangle$. Посмотрим, при каком условии на компоненты вектора пондеромоторной силы это имеет место. Подставляя выражения для производных от давления, полученные из первых двух уравнений (2.2), в два последующих уравнения (2.2) и пренебрегая для простоты движением жидкости в поле, получаем

$$\begin{aligned}
 v^i &= \Omega_r, \quad u^i = \Omega_x \\
 \Omega_r &= (\chi_s - \chi_l) C (1-C) \Psi_r D^{-1} \\
 \Omega_x &= [(\chi_s - \chi_l) \Psi_x + (\rho_s - \rho_l) g] C (1-C) D^{-1}
 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Поскольку $v^i \sim \delta_r/T$, $u^i \sim L/T$, где δ_r — смещение агрегата в поперечном направлении, то отсюда с учетом (3.1) следует: $\delta_r \sim T \Omega_r$, $T \sim L/\Omega_x$. Агрегация за счет радиального движения существенна, если за время оседания T на величину порядка L частицы сблизятся на величину порядка R : $\delta_r \sim R$. Условие, при котором отсутствует агрегация за счет радиального движения, имеет вид $\delta_r \sim L \Omega_r / \Omega_x \ll R$ или

$$\Omega_r / \Omega_x \ll R/L \quad (3.2)$$

Осреднение, таким образом, имеет смысл проводить, если внешнее магнитное поле удовлетворяет условию (3.2), которое для длинной трубки выполняется, например, при использовании магнитного поля соленоида, имеющего длину порядка нескольких длин трубки.

Из системы (2.2) получаем

$$v^i = \frac{1}{2D} \left\{ [\chi_s C - \chi_l (1-C)] \Psi_r + (1-2C) \frac{\partial p}{\partial r} \right\}$$

$$u' = \frac{1}{2D} \left\{ [\chi_s C - \chi_l (1-C)] \Psi_x + (1-2C) \frac{\partial p}{\partial x} + (\rho^1 - \rho^2) g \right\} \quad (3.3)$$

Поскольку $R \ll L$, то значения $p(x, 0)$ и $p(x, R)$ мало различаются, а вдоль трубки изменения p значительны в связи с образованием и уплотнением агрегатов. Поэтому можно принять $\partial p / \partial r \ll \partial p / \partial x$. Уравнения Максвелла в выбранной системе координат имеют вид

$$\frac{\partial H_r}{\partial x} = \frac{\partial H_x}{\partial r}, \quad \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_r}{\partial r} = -\frac{H_r}{r} \quad (3.4)$$

Для средних от H_r и H_x из (3.4) имеем соотношения

$$\frac{\partial}{\partial x} \langle H_r \rangle = H_x|_{r=R} - H_x|_{r=0} \approx 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \langle H_x \rangle = R H_r|_{r=R} \quad (3.5)$$

Решая уравнения (3.5) с условиями на свободной поверхности в трубке

$$\langle H_r \rangle|_{x=0} = \pi R^2 H_r|_{r=0}, \quad \langle H_x \rangle|_{x=0} = \pi R^2 H_x|_{r=0}$$

можно определить средние поля через значение напряженности поля на стенке и свободной поверхности. Для осредненных величин окончательно получаем

$$F_x^\alpha = \chi_\alpha \frac{\partial H^2}{\partial x} \frac{1}{2}, \quad \alpha = 1, 2 \quad (3.6)$$

После осреднения (2.2) с учетом условий непротекания на стенке ($v'|_{r=R} = 0$) для движения вдоль оси x получим уравнения для осредненных величин

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} C u' = 0 \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [C u' + (1-C) u^2] = 0 \quad (3.8)$$

$$\rho^\alpha g + F_x^\alpha - D(u^\alpha - u^\beta) - C^\alpha \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \quad \beta = \frac{2}{\alpha} \quad (3.9)$$

Используя условие $C u' + (1-C) u^2 = 0$ и при $x=0$, означающее непротекание суспензии через дно трубки, из (3.8) получим

$$C u' + (1-C) u^2 = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad t > 0 \quad (3.10)$$

Исключая из уравнений (3.9) производные $\partial p / \partial x$, с учетом (1.9), (3.6), (3.10) находим скорость оседания частиц

$$u' = \frac{(1-C)^2 w^0}{\alpha \eta \psi(C)} \left\{ (\chi_s - \chi_l) \frac{\partial H^2}{\partial x} \frac{1}{2} + (\rho_s - \rho_l) g \right\} \quad (3.11)$$

Окончательно задача свелась к системе двух квазилинейных уравнений первого порядка в переменных w, C с начальными и граничными условиями

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u' \frac{\partial w}{\partial x} = kC, \quad \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} C u' = 0 \quad (3.12)$$

$$C(x, 0) = C_0, \quad w(x, 0) = w_0, \quad x \in [0, L], \quad u'(L, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (3.13)$$

где u' имеет вид (3.11).

Интегральное условие, следующее из (3.13) и закона сохранения массы, имеет вид

$$\frac{1}{L} \int_0^L C dx = C_0 \quad (3.14)$$

При отсутствии магнитного поля формула (3.11) совпадает с соответствующим выражением для гравитационного оседания из [5]. Система (3.12) допускает решение методом характеристик. Уравнения характеристик и условия на них имеют тот же общий вид, что и в [5], но в (3.11) учитывается зависимость от x .

4. Для расчетов положим $\gamma=2,5$, как для сферических частиц. Введем безразмерные переменные

$$X = \frac{x}{L}, \quad T = \frac{tv_0}{L}, \quad W = \frac{w}{w_0}$$

$$K = \frac{kL}{w_0 v_0}, \quad V = \frac{u^1}{v_0}, \quad v_0 = \frac{(\rho_s - \rho_f) g w_0^{2/3}}{\alpha \eta}$$

где v_0 — скорость оседания одиночной частицы в поле силы тяжести. С учетом этого из (3.3) имеем

$$V = (1-C)^2 W^{2/3} q(X) \psi^{-1}(C)$$

$$q(X) = 1 + s \frac{\partial}{\partial X} \frac{h^2(X)}{2}, \quad h = \frac{H}{H_0}, \quad s = \frac{(\chi_s - \chi_f) H_0^2}{(\rho_s - \rho_f) g L} \quad (4.1)$$

Из выражения для s видно, что за счет магнитного поля эффект от действия гравитации усиливается или ослабляется в зависимости от знака s . При преобладании магнитного фактора над гравитационным имеет место парамагнитное втягивание частиц при $\chi_s > \chi_f$ и диамагнитное выталкивание при $\chi_s < \chi_f$.

Согласно общей теории, уравнения характеристик (в безразмерных переменных) и условия на них принимают вид

$$\left(\frac{dX}{dT} \right)_1 = (1-C)^{2/3} W^{2/3} q(X), \quad \left(\frac{dX}{dT} \right)_2 = \left(1 + \frac{C}{V} \frac{\partial V}{\partial C} \right) (1-C)^{2/3} W^{2/3} q(X) \quad (4.2)$$

$$\frac{dW}{dT} = KC, \quad \frac{2}{W} \left(\frac{dW}{dT} - Kc \right) - \frac{13,5}{1-C} \left(\frac{dC}{dT} + c(1-C)^{2/3} W^{2/3} \frac{d}{dX} q(X) \right) = 0 \quad (4.3)$$

Эта система допускает разрывы, условия на которых имеют вид

$$W_I = W_{II}, \quad C_I [u^1(C_I) - U] = C_{II} [u^1(C_{II}) - U] \quad (4.4)$$

где индексы I и II относятся к движению по разные стороны от разрыва, а U — скорость движения поверхности разрыва. Один разрыв, разделяющий верхний слой чистой жидкости ($C=0$) и нижний слой оседающих частиц ($C>0$), имеет место всегда (сила тяжести направлена вниз). Из (3.11) и (4.2) видно, что траектория этого разрыва совпадает с первой характеристикой семейства I.

Будем строить решение системы (3.12) при $X \in [0; 1]$, используя условие (3.14) в безразмерных переменных

$$\int_0^1 C dX = C_0 \quad (4.5)$$

Вообще говоря, систему (3.12) после образования разрыва при $X=X_\alpha$ надо решать на интервалах $[0, X_\alpha]$ и $[X_\alpha, 1]$ и сшивать решения, используя уравнение $dX_\alpha/dT=U$ и условие (4.4).

Характеристики в переменных (X, T) схематически изображены на фиг. 1, где O и A — координаты вершины столбика жидкости и дна трубки соответственно. На OA выполняются начальные условия $C=C_0$, $W=1$. Характеристика OBD первого семейства является графиком оседания столбца частиц. При отсутствии магнитного поля ($q=1$) уравнения (4.2), (4.3) совпадают с полученными в [5].

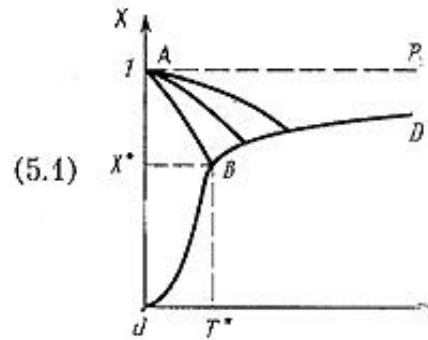
5. Геометрия задачи предполагает использование магнитного поля цилиндрического соленоида с круговым сечением. Совмещая ось трубки с осью соленоида, получим $H_{0r}|_{r=0}=0$, а так как $R \ll L$, то для достаточно длинных соленоидов $H_{0r}|_{r=R} \approx H_{0r}|_{r=0}$. Это обеспечивает выполнение условия $\Omega_r/\Omega_x \ll R/L$, что, как было показано выше, делает обоснованным рассмотрение квазиодномерного оседания при $v' \ll u'$.

При экспериментах с седиментацией часто используют соленоид с равномерной обмоткой вдоль оси. Для такой катушки (геометрический центр соленоида находится в точке $X=0$) [8]

$$H_x = 0,2\pi\lambda I \left[\beta_+ \ln \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta_+^2}}{1 + \sqrt{1 + \beta_+^2}} + \beta_- \ln \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta_-^2}}{1 + \sqrt{1 + \beta_-^2}} \right] \quad (5.1)$$

$$F_x = H_x \frac{\partial H_x}{\partial X}, \quad \beta_\pm = \beta \pm \frac{X}{R_1},$$

$$\beta = \frac{l}{R_1}, \quad \alpha = \frac{R_2}{R_1}$$



Фиг. 1

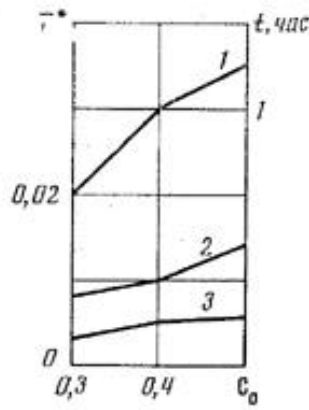
Коэффициент λ учитывает пустоты в обмотке; I — ток; R_1 и R_2 — внутренний и внешний радиусы обмотки; l — длина катушки. Расчеты по (5.1) показывают, что вблизи оси соленоида $d(H^2/2)/dH \sim X$. Поэтому рассмотрим случай, когда в (4.2) $q(X) = d - bX$, $d \geq 1$, $b > 0$ (магнитная сила убывает от вершины к дну трубки).

Исследуем приближенное решение системы (3.12) при замене kC на kC_0 , что соответствует точному решению, если в качестве G взять $G_0 = -(C_0/C)kN^2$. При этом для случая $(dX/dT)|_{C=C_0} < 0$ в области OAB (фиг. 1), где AB — первая характеристика семейства II, $dW/dT = KC_0$, так как через каждую точку области проходит характеристика семейства I (4.2). Тогда в области AOB , согласно (4.3)

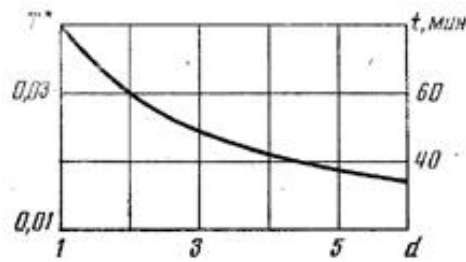
$$W = 1 + KC_0 T, \quad C = C^* = C_0 (1 - bX/d)^{-1} \quad (5.2)$$

Здесь $b/d \leq 1$, $X \leq X_{\max} < 1$ в силу несжимаемости частиц, поэтому $C^* \leq C_0 / (1 - X_{\max})$. Видно, что в области AOB $C^* \geq C_0$, причем рост концентрации при приближении ко дну трубки определяется параметром b/d , характеризующим внешнее магнитное поле. Это качественно отличается от безмагнитного оседания, где при тех же условиях имеется область с постоянной концентрацией $C = C_0$. Скорость оседания столбика частиц в AOB , задаваемая (4.2), имеет вид

$$U = d(1 + KC_0 T)^{-1/2} \frac{(1 - C_0 - bX/d)^{1/2}}{(1 - bX/d)^{3/2}} \quad (5.3)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

В [5] было показано, что параметр, сильно зависящий от изменений K и слабо от изменений C_0 , есть время достижения максимальной скорости оседания (на фиг. 1 — T^*). Величина T^* находится из соотношения

$$\int_0^{T^*} U(t) dt \rightarrow \int_0^{T^*} \frac{(1-5,5C(t))U(t) dt}{1-C(t)} = 1$$

Из (4.2), (5.2) и (5.3) находим координату X^* точки B

$$X^* = \frac{d}{b} (1-C_0) \left[1 - \exp\left(-\frac{b}{4,5} C_0 d\right) \right]$$

Из последних двух соотношений с учетом (5.3) имеем

$$T^* = \frac{1}{KC_0} \left\{ \left[\frac{5KC_0}{3} \left[\Pi(z^*) - \Pi\left(\frac{1}{\sqrt{1-C_0}}\right) \right] + 1 \right]^{0,6} - 1 \right\}$$

$$\Pi(z) = \frac{2}{b} \left\{ \frac{z^7}{7} + \frac{z^5}{5} + \frac{z^3}{3} + z + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{z-1}{z+1} \right| \right\}, \quad z^* = \sqrt{\frac{1-bX^*/d}{1-C_0-bX^*/d}} \quad (5.4)$$

При $b \rightarrow 0$, $d \rightarrow 1$ соотношения (5.2)–(5.4) переходят в формулы для гравитационного оседания [5]. Величина T^* определяет момент времени, когда оседание начинает замедляться (из-за влияния дна трубки). При $T=0$ в точке A концентрация меняется скачком от C_0 до максимальной $C_{\max} \leq 1$, т. е. в A берет начало множество характеристик второго семейства (4.2), которые при $C \in [C^*, C_{\max}]$ заполняют область $PABD$. Оседание будет идти с образованием трех зон: зоны чистой жидкости, зоны, где $C=C^*=\text{const}$, и зоны, где C непрерывно изменяется от C^* до C_{\max} .

Согласно результатам расчетов (фиг. 2), величина T^* , как и в [5], чувствительна к изменениям K и слабо зависит от C_0 (принималось $d=2$, $b=1$; кривым 1, 2, 3 соответствуют $K=10^5, 10^6, 10^7$). Зависимость T^* от d для случая $d-b=1$, $C_0=0,4$ изображена на фиг. 3. Найденное значение T^* существенно меньше, чем при гравитационной седиментации ($b=0$, $d=1$).

Случаю $d=b$ соответствует наличие магнитных сил и сил тяжести (когда дно трубки находится ниже центра катушки на уровне $q(X)=0$) либо наличие только магнитных сил (когда дно трубки совмещается с серединой катушки). В первой ситуации участок, где поле линейно, может быть меньшим по длине, т. е. для того же действия поля достаточно более короткого соленоида. В случае $d < b$, $b > 0$ задача сводится к предыдущей с той разницей, что частицы будут стягиваться в сгусток не ко дну трубки, а к сечению, где $q(X)=0$.

6. Обсудим полученные результаты применительно к оседанию эритроцитов крови в капилляре ($L=0,1$ м, $R=0,001$ м). При стандартной постановке этого теста окончательный показатель (высота столба чистой плазмы через 1 ч. после начала оседания) сильно зависит от начальной концентрации эритроцитов. Это затрудняет объективную оценку агрегационных свойств эритроцитов, отражающую патологические состояния крови.

Пусть соленоид с обмоткой из меди имеет длину $l=0,3$ м, удельное сопротивление $\sigma=1,67 \cdot 10^{-8}$ Ом·м, $R_1=0,01$ м, $R_2=0,06$ м, $\lambda=1$. Тогда в случае $K=10^4$, $C_0=0,4$ время оседания, соответствующее T^* , уменьшается с 1 ч 22 мин до 37 мин. При размещении капилляра так, как описано выше, то же ускорение оседания будет давать соленоид с $l=0,17$ м. Следовательно, использование параметра T^* в диагностических целях имеет преимущества перед стандартным показателем РОЭ, а применение магнитного поля значительно ускоряет проведение теста.

При численных расчетах T^* принимались значения $K=10^4-10^5$, которые получаются практически во всех экспериментах с кровью человека при гравитационной седиментации [5]. На самом деле в данном случае необходима постановка экспериментов по оседанию эритроцитов в описанном магнитном поле для определения численных значений K , поскольку в неоднородном по оси поле агрегация может усиливаться за счет слабого радиального сближения частиц, о чем говорилось выше. Возможно, этим объясняется различие в результатах экспериментов РОЭ в магнитном поле у разных авторов. Действительно, обычно используются значительно более короткие соленоиды, для которых условие (3.2) не выполняется. Поэтому в самом начале эксперимента агрегация за счет движения эритроцитов в радиальном направлении будет приводить к ускоренному оседанию по сравнению с расчетным из-за резкого увеличения объема агрегатов.

Автор выражает глубокую признательность И. Е. Тарапову, С. А. Резиреру, Е. С. Лосеву за внимание к работе и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Влияние магнитных полей на биологические объекты // Матер. III Всесоюз. сампоз. Калининград: Изд-во Калинингр. ун-та, 1975. 240 с.
2. Электромагнитные поля в биосфере. Т. 2. Биологическое действие электромагнитных полей. М.: Наука, 1984. 326 с.
3. Плявинь Ю. А., Блум Э. Я. Магнитные свойства и пара- и диамагнитный форец клеток крови при высокоградиентной магнитной сепарации // Магнитн. гидродинамика. 1983. № 4. С. 3-14.
4. Пирузян Л. А., Кузнецов А. А., Чиков В. М., и др. Магнитофорез и гравитационная седиментация эритроцитов // Изв. АН СССР. Сер. биол. 1984. № 1. С. 18-30.
5. Лосев Е. С. Моделирование оседания агрегирующих частиц // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 3. С. 71-78.
6. Резирер С. А. К вопросу о континуальных моделях суспензий // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 4. С. 679-688.
7. Тарапов И. Е. Об основных уравнениях и задачах гидродинамики поляризующихся и намагничивающихся сред // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1973. Вып. 17. С. 221-239.
8. Карасик В. Р. Физика и техника сильных магнитных полей. М.: Наука, 1964. 347 с.

Харьков

Поступила в редакцию
1.VII.1986