

1. Назва дисципліни – **Теоретична гідромеханіка**
2. Лектор - **Пацегон Микола Федорович**, професор
3. Предмет нормативний
4. Курс Ш, семестр 6 (весняний); курс 1У, семестр 7 (осінній)
5. Попередні умови для вивчення.

Необхідні знання курсу механіки суцільних середовищ, тензорного та векторного числення, теоретичної механіки, диференціального та інтегрального числення, лінійної алгебри та аналітичної геометрії, рівнянь математичної фізики і теорії функцій комплексної змінної.

6. Анотація курсу.

Даний курс складається із двох основних розділів: 1) динаміки ідеальної рідини, 2) динаміки в'язкої рідини.

Розділ 1) "Динаміка ідеальної рідини" містить формулювання замкненої початкової крайової задачі, виклад властивостей течій ідеальної рідини (інтеграли руху, плоска задача гідродинаміки, метод конформних відображень, метод приєднаних особливостей дослідження задач гідромеханіки ідеальної нестисливої рідини), основних питань руху твердого тіла (теорія тонкого профілю, парадокс Даламбера, коефіцієнти приєднаних мас, обтікання тіл обертання) та основних задач поширення хвиль на вільній поверхні та поверхні розділу рідин.

Розділ 2) "Динаміка в'язкої рідини" включає постановку початково-крайових задач динаміки в'язкої рідини, основні точні розв'язки рівнянь Нав'є – Стокса, основні наближення рівнянь динаміки в'язкої рідини: Прандтля, Стокса, Озеена. Розділ включає також викладення основних питань теорії стійкості руху і теорії розвиненої турбулентності; напівемпіричні теорії турбулентності та сучасні підходи до вивчення турбулентності методами теорії динамічних систем.

Вопросы по курсу "Теоретическая гидромеханика", VI семестр.

1. Постановка краевых задач в теоретической гидромеханике. Уравнения в интегральной форме. Дифференциальная форма уравнений. Дивергентная форма дифференциальных уравнений. Условия на поверхностях сильных разрывов. Реологические уравнения для вязкой жидкости. Уравнения термодинамического состояния. Граничные и начальные условия. Условия на поверхностях раздела.
2. Ковариантная форма уравнений движения. Уравнения движения в неинерциальных системах отсчета.
3. Существенные различия в движениях идеальной и вязкой жидкости: необратимость движения, завихренность течений, диссипация механической энергии.
4. Гидростатика. Условия равновесия жидкости: условия для сил, условия на поверхностях раздела. Распределение давления в однородной жидкости. Главный вектор и главный момент сил давления. Закон Архимеда.
5. Динамика идеальной жидкости. Уравнения движения в форме Громеки-Лэмба. Интегралы движения: Бернулли, Коши-Лагранжа, Громеки. Применение интеграла Бернулли: трубка Пито-Прандтля, водомер Вентури, струйный насос. Формула Торричелли.
6. Условия потенциальности течений (теоремы Томсона, Лагранжа). Движения под влиянием мгновенного импульса давлений. Физический смысл потенциала скорости. Ограничения на скорость в потенциальных течениях.
7. Причины возникновения вихревых течений. Теоремы Гельмгольца о вихрях.
8. Плоские установившиеся безвихревые течения идеальной несжимаемой жидкости. Потенциал и функция тока в плоских течениях. Физический смысл функции тока. Уравнения линий тока. Комплексный потенциал течения. Постановка краевых задач в терминах потенциала, функции тока и комплексного потенциала. Обратный метод гидродинамики. Комплексные потенциалы простейших течений: однородный поступательный поток, течение от источника (стока), течение от диполя, вихря, вихреисточника. Интеграл от комплексной скорости. Метод присоединенных особенностей решения задач гидромеханики.
9. Потенциальное обтекание кругового цилиндра: бесциркуляционное обтекание, обтекание с циркуляцией, чисто циркуляционное обтекание. Парадокс Даламбера.
10. Метод конформных отображений решения плоских задач гидродинамики. Определение циркуляции (постулат Жуковского-Чаплыгина). Формулы Чаплыгина-Блазиуса.
11. Общее представление отображающей функции внешности круга на внешность контура. Формулы Жуковского-Кутта. Теорема Жуковского.
12. Преобразование Жуковского. Крыловые профили Жуковского. Комплексный потенциал обтекания пластинки. Понятие подсасывающей силы.
13. Теория тонкого профиля. Постановка задачи об обтекании тонкого профиля. Решение задачи методом тригонометрических рядов.

Вопросы по курсу “Теоретическая гидромеханика”, III семестр

1. Схема Чаплыгина обтекания крыла конечного размаха. Свободные и присоединенные вихри. Подъемная сила и сила индуктивного сопротивления. Крыло минимального индуктивного сопротивления.
2. Пространственные безвихревые течения идеальной жидкости. Потенциалы течений отточника (стока), диполя. Обтекание сферы.
3. Осесимметричные течения идеальной жидкости. Функция тока осесимметричных течений и ее физический смысл. Связь функции тока с потенциалом скорости. Функции тока простейших осесимметричных течений: поступательный поток, источник, диполь.
4. Продольное обтекание тела вращения. Метод источников и стоков. Поперечное обтекание тела вращения.
5. Движение твердого тела в идеальной жидкости. Общий вид потенциала скоростей. Поведение потенциала в окрестности бесконечно удаленной точки. Расчет гидродинамических реакций (сила и момент сил) при движении тела. Уравнения движения твердого тела в идеальной жидкости. Импульсивная сила и пара. Коэффициенты присоединенных масс. Присоединенная масса шара.
6. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. Основные уравнения и граничные условия. Постановка задач об одномерных нестационарных течениях. Простейшие течения: чистый сдвиг (течение Куэтта), течение Пуазейля, течение в круглой трубе, течение между двумя вращающимися цилиндрами, безнапорное нестационарное течение (размывание тангенциального разрыва), вязкая волна Стокса.
7. Движение вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса. Задача Стокса о медленном движении шара в вязкой жидкости. Сила сопротивления движению. Парадокс Стокса. Приближение Озеена.
8. Теория смазки вязкой жидкостью. Параметры смазки. Основные уравнения теории смазки. Гидродинамический подшипник Рейнольдса. Распределение давления в смазочном клине. Подъемная сила гидродинамического подшипника.
9. Движение вязкой жидкости при больших числах Рейнольдса. Уравнения Прандтля пограничного слоя. Свойства погранслоя. Задача Блазиуса. Толщина пограничного слоя. Коэффициент сопротивления пластины. Явление отрыва пограничного слоя.
10. Интегральное соотношение Кармана в теории пограничного слоя. Расчет погранслоя на пластинке конечной длины.
11. Постановка задачи теории гидродинамической устойчивости движения. Задача Лина об устойчивости движения между параллельными пластинами. Уравнение Орра-Зоммерфельда и граничные условия для него. Результаты Лина по устойчивости течения. Критическое число Рейнольдса.
12. Теория Рейнольдса развитой турбулентности. Понятие гидродинамических пульсаций. Правила осреднения Рейнольдса. Основные уравнения развитой турбулентности. Тензор турбулентных напряжений.
13. Полуэмпирические теории турбулентности. Приближение Буссинеска. Приближение Прандтля пути смешения. Теория Миллионщикова пристенного пограничного слоя. Вязкий и логарифмический подслои.
14. Цепочка уравнений Фридмана-Келлера.

6. Теми практичних занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Диференціальні рівняння руху та рівноваги рідини.	2
2	Динаміка ідеальної рідини. Інтеграли руху. Приклади застосування інтегралів.	2
3	Плоскі потенціальні течії. Потенціали простих течій.	2
4	Плоскі потенціальні течії. Потенціали простих течій.	2
5	Метод конформних відображень. Постулат Чаплигіна-Жуковського.	2
6	Сили та моменти сил, які діють на тіло в потоці ідеальної нестисливої рідини.	2
7	Загальні властивості течій нестисливої в'язкої рідини.	2
8	Нестаціонарні течії в'язкої рідини.	2
9	Стаціонарні ламінарні течії в'язкої рідини.	2
10	Функції струму та вихору. Рівняння Гельмгольца.	2
11	Течії рідини при малих числах Рейнольдса. Наближення Стокса.	2
12	Течії рідини при великих числах Рейнольдса. Наближення Прандтля.	2
13	Метод інтегральних співвідношень в теорії примежового шару.	2
14	Явище відриву примежового шару. Стійкість ламінарних течій.	2
15	Турбулентний рух рідини. Напівемпіричні теорії турбулентності.	
16	Хвилі на поверхні важкої рідини. Дисперсійні рівняння. Групова швидкість.	4
	Всього	34

Типові задачі ректорської контрольної роботи

Ректорська контрольна робота з теоретичної гідромеханіки Спеціальність “механіка”, гр.ММ-41

Варіант 1

- 1.Сформулювати постановку початково-краєвої плоскості задачі гідродинаміки ідеальної рідини в термінах потенціалу швидкості.
- 2.Запишіть комплексний потенціал течія від джерела, розташованого в початку координат.

Якого фізичного значення має довільна константа, що входить в вираз потенціалу? Приведіть обґрунтування.

- 3.Визначити потенціал швидкості, функцію струму та форму обтіканого тіла, якщо течія визначається комплексним потенціалом

$$W(z) = \sqrt{z}$$

Ректорська контрольна робота з теоретичної гідромеханіки

Спеціальність “механіка”, гр.ММ-41

Варіант 2

- 1.Сформулювати постановку початково-краєвої плоскості задачі гідродинаміки ідеальної рідини в термінах функції струму.

- 2.Запишіть комплексний потенціал течія від вихря, розташованого в початку координат.

Якого фізичного значення має довільна константа, що входить в вираз потенціалу? Приведіть обґрунтування.

- 3.Визначити потенціал швидкості, функцію струму та форму обтіканого тіла, якщо течія визначається комплексним потенціалом

$$W(z) = \bar{v}_\infty z + \frac{Q}{2\pi} \ln z$$

9. Список рекомендованої літератури.

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М., Наука, 1978.
2. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Гидромеханика. М., Наука, 1986.
3. Валландер С.В. Лекции по гидроаэромеханике. Изд-во Ленинградск. ун-та, 1978.
4. Милн-Томпсон Л.М. Теоретическая гидродинамика. М., Мир, 1964.
5. Кибель И.А., Кочин Н.Е., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. ч.1,2. М., ГИФМЛ, 1963.
6. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкостей. М., Мир, 1973.
7. Тарапов И.Е. Механика сплошной среды. Часть 2, Харьков, "Золотые страницы", 2002.
8. Тарапов И.Е. Механика сплошной среды. Часть 3, Харьков, "Золотые страницы", 2004.
9. Прандтль Л. Гидроаэромеханика. Москва-Ижевск.:2000.-576 с.
10. Фабер Т.Е. Гидроаэродинамика. Москва: Постмаркет. 2001.-560 с.
11. Ламб Г. Гидродинамика. М.-Л.: ГИТТЛ. 1947.-928 с.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ЗАДАНИЯ

для самостоятельной работы по теме “Плоское безвихревое движение невязкой несжимаемой жидкости” курса “Теоретическая гидромеханика.”

Методические материалы предназначены для второго рубежного контроля знаний по курсу “Теоретическая гидромеханика”.

Контроль знаний осуществляется:

1. Тестированием по теоретическим вопросам.
2. Оценкой решения 2-ух задач из числа предложенных либо аналогичных..

1. РАБОЧИЙ ПЛАН.

- | | |
|--|--------------------------|
| 1. Понятие плоского движения жидкости. | [2] 129-130 |
| 2. Потенциал скорости и функция тока. | [1] 196-198, [2] 130-132 |
| Связь между ними. Физический смысл | |
| 3. Применение функций комплексного переменного к изучению плоского безвихревого движения невязкой несжимаемой жидкости. Комплексный потенциал комплексно сопряженная скорость. Принцип суперпозиции для комплексного потенциала. | [1] 199-201, [2] 133-134 |
| 4. Простейшие функции комплексного переменного и соответствующие им течения: | |
| а) $W = az^n, a > 0$ | [2] 134-135 |
| б) $W = Q/2\pi \ln z$ | [1] 202-203, [2] 136-137 |
| в) $W = \Gamma i/2\pi \ln z$ | [1] 203-204, [2] 139-140 |
| г) $W = m/2 \pi z, m > 0$ | [1] 206-207, [2] 138-139 |
| д) $W = V_\infty z + m/2\pi z$ | [1] 207-212 |
| е) $W = V_\infty z + m/2\pi z + (\Gamma i/2\pi) \ln z$ | [1] 212-215 |
| 5. Плоская задача обтекания профиля невязкой несжимаемой жидкостью. | [1] 222-223, [2] 237-243 |

6. Решение задачи обтекания профиля невязкой несжимаемой жидкостью методом конформного отображения. [1] 222-225, [2] 257-261
7. Обтекание профилей с угловой точкой (с острой кромкой). Постулат Жуковского-Чаплыгина. [1] 225-228, [2] 259-261
8. Динамическое воздействие потока на обтекаемый профиль. Формулы Чаплыгина. [1] 242-243, [2] 252-254
9. Выражение главного вектора и главного момента сил давления потока на обтекаемый профиль через основные характеристики течения (V_∞ , Γ). Теорема Жуковского. [1] 243-244, [2] 262-265
10. Примеры применения метода конформных отображений. Преобразование Жуковского. Обтекание цилиндра. [1] 207-212, 228-233, 235-236, [2] 272-274

Сравнение с экспериментом. Обтекание пластины, дужки окружности, эллипса.

11. Теоретические крыловые профили Жуковского. Обтекание крылового профиля произвольной формы. [1] 233-242, [2] 280-291
12. Обтекание тонкого профиля произвольной формы (задача Л.И.Седова). [1] 256-263, [2] 297-309

II. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ.

1. Какое движение называется плоским?
2. Что называется потенциалом скорости, функцией тока? Их физический смысл.
3. Дайте определение изопотенциальных линий и линий тока. Их свойства.
4. Как записываются уравнения изопотенциальных линий и линий тока с помощью потенциала скоростей и функции тока?
5. Являются ли функции тока и потенциал скоростей гармоническими сопряженными функциями? Если да, то в силу каких уравнений гидромеханики?
6. Дайте определение комплексного потенциала и комплексно сопряженной скорости. Их гидродинамическая интерпретация.
7. Что такое комплексный потенциал нескольких налагаемых друг на друга потоков? Обоснуйте принцип суммирования потенциалов для сложных потоков.
8. Как определяются циркуляция скорости по замкнутому контуру с помощью комплексного потенциала и потенциала скоростей?
9. Как определяется поток жидкости через произвольный контур с помощью комплексного потенциала и функции тока?
10. Какой вид имеет комплексный потенциал
 - а) источника (или стока) в точке z_0
 - б) вихря в точке z_0

- в) диполя в точке z_0
- г) бесциркуляционного обтекания круга,
- д) циркуляционного обтекания круга.

11. Дайте определение критических точек потока.

12. Дайте общую постановку плоской задачи об обтекании тела.

13. Сформулируйте основные положения, лежащие в основе решения плоской задачи обтекания профиля невязкой несжимаемой жидкостью методом конформного отображения.

14. Какие дополнительные условия накладываются на функцию, осуществляющую конформное отображение области течения на внешность круга.

15. Изменится ли при конформном отображении циркуляция скорости по любому замкнутому контуру, охватывающему обтекаемый профиль?

16. Что можно сказать о единственности решения задачи обтекания профиля плоским потоком невязкой несжимаемой жидкости с заданной на бесконечности скоростью?

17. В чем состоит постулат Жуковского-Чаплыгина? Его физическое обоснование.

18. Укажите основные свойства конформного отображения малой окрестности острой кромки профиля на малую окрестность круга во вспомогательной плоскости.

19. Что можно сказать о точке окружности во вспомогательной плоскости, соответствующей острой кромке профиля, в случае выполнения постулата Жуковского-Чаплыгина?

20. В каких практических задачах обтекания профилей возникают особые точки конформного преобразования? Их характер, привносимые трудности в метод конформных отображений. Чему равна скорость в угловой точке? В точке возврата?

21. Как определяется ось бесциркуляционного обтекания профиля (первая ось профиля)?

22. Какой угол называется теоретическим углом атаки и чем он отличается от практического угла атаки?

23. Как выражается через комплексный потенциал течения главный вектор и главный момент сил давления потока на обтекаемый контур? Как они направлены ?

Чему равны по величине?

24. Какой вид имеет преобразование Жуковского?

25. С помощью преобразования Жуковского найдите комплексный потенциал обтекания цилиндра.
26. Нарисуйте картину бесциркуляционного обтекания эллипса.
27. Используя комплексный потенциал обтекания эллипса, получите предельным переходом:
- а) комплексный потенциал циркуляционного обтекания круга; найдите распределение давления по кругу и сравните его с экспериментальными данными;
 - б) комплексный потенциал циркуляционного обтекания пластины.
28. Нарисуйте картину бесциркуляционного обтекания пластины. Чему равна величина скорости в передней кромке пластины? В задней кромке?
29. Проиллюстрируйте применение постулата Жуковского-Чаплыгина на примере циркуляционного обтекания пластины. Найдите значение циркуляции Γ из условия выполнения постулата Жуковского-Чаплыгина на задней кромке пластины.
30. Можно ли подобрать циркуляцию Γ таким образом, чтобы скорость была конечной одновременно на передней и задней кромках пластины? Рассмотрите комплексный потенциал обтекания дужки круга. Когда скорости в обеих особых точках конформного преобразования конечны? Чему они равны?
31. Нарисуйте картину плавного циркуляционного обтекания пластины, дужки круга.
32. Нужен ли постулат Жуковского-Чаплыгина в случае обтекания профиля без угловых точек? Если нет, то почему?
33. Можно ли однозначно определить подъемную силу профиля при помощи метода конформных отображений? В чем трудность?
34. Каким образом получаются теоретические крыловые профили Жуковского-Чаплыгина? Обратите внимание на направление смещения центра отображающего круга и деформацию профиля в зависимости от этого смещения.
35. Как графически реализовать отображающую функцию Жуковского?

III. ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ.

1. Доказать, что при плоском движении ($V_z=0$) несжимаемой жидкости функция тока удовлетворяет уравнению Лапласа. Показать, что линии $\psi=\text{const}$ являются линиями тока.
2. Показать, что при плоском потенциальном течении невязкой несжимаемой жидкости можно

ввести комплексный потенциал

$$W(z)=\varphi+i\psi, z=x+iy$$

(φ -потенциал скорости, ψ -функция тока), являющийся аналитической функцией комплексного переменного z . Доказать, что линии тока ($\psi=\text{const}$) и эквипотенциальные линии (линии равного потенциала ($\varphi=\text{const}$)) образуют два семейства взаимно ортогональных линий. Найти выражение для комплексно сопряженной скорости через компоненты вектора скорости.

3. Доказать, что при плоском потенциальном течении невязкой несжимаемой жидкости имеет место соотношение

$$\int_L V dz = \Gamma + iQ$$

где V – комплексно сопряженная скорость, Γ и Q – циркуляция скорости и поток жидкости через любой замкнутый контур L , принадлежащий области течения жидкости.

4. Изучить движение, определяемое комплексным потенциалом

$$W(z) = \frac{q}{2\pi} \ln z$$

где q – комплексное число. Найти линии тока и эквипотенциальные линии.

5. Изучить движение невязкой несжимаемой жидкости в плоскости со стенкой вдоль положительной оси X , определяемое комплексным потенциалом

$$W(z) = a\sqrt{z}, \quad a > 0.$$

показать, что линиями тока являются параболы.

6. Показать, что течение определяемое комплексным потенциалом

$$W(z) = az^2, \quad a > 0$$

соответствует обтеканию прямого угла. Найти линии тока и эквипотенциальные (изопотенциальные) линии.

7. Определить положение и характер особенностей при течении, определяемом

комплексным потенциалом вида

$$W(z) = a \ln(z - c^2/z), \quad a > 0$$

Найти потенциал скоростей и функцию тока. Построить картину течения. Найти объем жидкости Q протекающей через линию соединяющую точки $z_1 = i$ и $z_2 = 1/2$.

8. Исследовать движение жидкости определяемое потенциалом скорости

$$\varphi = ax(x^2 - 3y^2), \quad a > 0$$

а) определить комплексный потенциал, б) определить функцию тока и построить линии тока, в) определить объем жидкости, протекающей через отрезок прямой линии, соединяющей точки $z_1 = 0$, $z_2 = 1 + i$.

9. Исследовать движение, определяемое комплексным потенциалом

$$W(z) = \sqrt{z} - i\sqrt{p/2}, \quad p > 0$$

а) определить потенциал скоростей и функцию тока, б) определить форму обтекаемого тела и построить линии тока.

10. Исследовать движение определяемое комплексным потенциалом

$$W(z) = V_\infty z + \frac{Q}{2\pi} \ln z$$

а) определить потенциал скоростей и функцию тока, б) определить форму обтекаемого тела и показать, что этим комплексным потенциалом можно приближенно описать восходящий поток воздуха у горы. Какова максимальная высота горы

11. Исследовать движение определяемое комплексным потенциалом

$$W(z) = -\frac{m}{2\pi} * \frac{2z}{z^2 + 1}, \quad m > 0$$

а) определить φ и ψ , б) построить картину течения.

12. Движение невязкой несжимаемой жидкости определяется комплексным потенциалом

$$W(z) = (1+i)\ln(z^2-1) + (2-3i)\ln(z^2+4) + 1/z$$

вычислить объем жидкости, протекающей через окружность $x^2 + y^2 = 9$ и найти циркуляцию

скорости по этой окружности.

13. Пусть в верхней полуплоскости $y > 0$ имеется несколько источников интенсивностью Q_k в точках z_k и несколько вихрей интенсивностью Γ_e в точках z_e . Показать, что если поместить еще в нижней полуплоскости в точках \bar{z}_k , симметричных точкам z_k относительно вещественной оси, источники интенсивностью Q_k , а в точках \bar{z}_e вихри интенсивностью $-\Gamma_e$ (как говорят, отразить источники и вихри от оси OX), то ось OX делается линией тока и может быть заменена твердой стенкой.

14. Найти комплексный потенциал и уравнение линий тока в полярных координатах для движения жидкости в квадрате ограниченном осями координат X и Y , если известно, что в точках $z=1+i$ находится источник интенсивности Q , а в точке $z=0$ сток той же интенсивности. Найти также величину скорости в точке $z=1$.

15. Найти комплексный потенциал течения, соответствующего обтеканию круга без циркуляции однородным на бесконечности потоком жидкости. Вычислить величину скорости на границе круга. Показать, что суммарное давление жидкости на круг равно нулю (парадокс Даламбера-Эйлера).

16. Найти комплексный потенциал течения, соответствующего обтеканию круга с циркуляцией однородным на бесконечности потоком. Определить критические точки (точки, в которых скорость обращается в нуль). Вычислить результирующую силу, действующую на круг со стороны жидкости.

17. Найти комплексный потенциал течения, производимого источником в присутствии стенки.

18. Найти комплексный потенциал течения, производимого источником при наличии круга.

ПРИМЕЧАНИЕ :Решение задач 15, 16, 17 приведено в [3] .

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА.

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970.
2. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. М.: ГИТЛ, 1955.
3. Ильюшин А.А., Ломакин В.А., Шмаков А.П. Задачи и упражнения по механике сплошной среды. М.: МГУ, 1973.
4. Тарапов И.Е. Механика сплошных сред. Часть 3. Динамика невязкой жидкости. Х., Золотые страницы, 2005.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА.

1. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
3. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.