

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ, ОПИСЫВАЮЩИЕ ПРОЦЕСС ЗАГРЯЗНЕНИЯ ВОДЫ

*Курень С.Г., Мишугова Г.В., Мул А.П., Рябых Г.Ю.*

Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Россия

Отобраны и проанализированы данные по выбросам загрязняющих веществ в водные объекты и по очистке последних. Рассмотрены математические модели, которые наиболее точно описывают процесс загрязнения воды. Приведены результаты исследования закономерностей данных процессов.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** экология, загрязнение и очистка вод, математическое моделирование.

## МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ, ЯКІ ОПИСУЮТЬ ПРОЦЕСИ ЗАБРУДНЕННЯ ВОДИ

*Курень С.Г., Мишугова Г.В., Мул А.П., Рябых Г.Ю.*

Відібрано та проаналізовано дані щодо викидання забруднюючих речовин та їх очищення у водні об'єкти. Розглянуто математичні моделі, які найбільш точно описують процес забруднення води. Наведено результати досліджень закономірностей цих процесів.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** екологія, забруднення та очищення вод, математичне моделювання.

## MATHEMATICAL MODELS DESCRIBING THE WATER POLLUTION PROCESSES

*Kuren' S.G., Mishugova G.V., Mul A.P., Ryabikh G.Y.*

The data on emissions of pollutants in water systems and water cleaning are selected and analyzed. The mathematical models describing the process of water pollution with the best accuracy are considered. The studied regularities of the water pollution processes are given.

**KEY WORDS:** ecology, pollution, water purification, mathematical modeling.

**1. Постановка задачи.** Вода — на первый взгляд простейшее химическое соединение двух атомов водорода и одного атома кислорода — является, без всякого преувеличения, основой жизни на Земле. Не случайно ученые в поисках форм жизни на других планетах солнечной системы столько усилий направляют на обнаружение следов воды.

Сама по себе вода не имеет питательной ценности, но она является неперменной составной частью всего живого. В растениях содержится до 90% воды, в теле же взрослого человека ее 60–65%. Если же говорить более детально, то кости — это всего 22% воды, однако мозг — это уже 75%, мускулы — тоже 75% воды (в них находится около половины всей воды тела), кровь состоит из воды на 92 %.

Запасы пресной воды представляют собой единый ресурс. Рассчитанное на длительную перспективу освоение мировых ресурсов пресной воды требует целостного подхода к использованию этих ресурсов и признания взаимозависимости между элементами, составляющими запасы пресной воды и определяющими ее качество.

В мире существует мало регионов, не затронутых проблемами потери потенциальных источников снабжения пресной водой, ухудшения качества воды и загрязнения поверхностных и

подземных источников. Основные проблемы, отрицательно влияющие на качество воды рек и озер, возникают, в зависимости от обстоятельств, с разной степенью остроты в результате несоответствующей очистки бытовых сточных вод, слабого контроля за сбросом промышленных сточных вод, утраты и разрушения водосборных площадей, нерационального размещения промышленных предприятий, обезлесения, бесконтрольной залежной системы земледелия и нерациональных методов ведения сельского хозяйства. Это приводит к вымыванию питательных веществ и пестицидов. Нарушается естественный баланс водных экосистем, и возникает угроза для живых пресноводных ресурсов.

Первостепенная роль воды в жизни всех живых существ, и человека в том числе, связана с тем, что она является универсальным растворителем огромного количества химических веществ. Т.е. фактически является той средой, в которой и протекают все процессы жизнедеятельности.

Исследование проблемы загрязнения воды заключается в оценивании влияния модернизации на экологичность производства. При усовершенствовании технологий должны уменьшаться объемы выбросов, измениться объемы

использования воды на хозяйственные нужды; орошение, сельское хозяйство, рыболовство и другие виды экономической деятельности.

Целью работы является анализ процесса загрязнения воды, а также изучение закономерности данного процесса.

Важно проводить качественный и количественный анализ загрязняющих факторов, выявлять закономерности загрязнения от года к году на конкретном объекте.

**2. Математическая модель загрязнения воды на основе моделей типа Гаузе.** Данные по загрязнению водных ресурсов за 1996–2009 годы взяты из экологических вестников Дона [1–6].

Будем рассматривать взаимодействие загрязнения с окружающей средой на основе следующих методов:

1) модели Лотки–Вольтерра [7–9];

Пусть  $X(t)$  – объем (концентрация) загрязнений в сточных водах;

$Y(t)$  – объем уловленных загрязнений в момент времени  $t$ .

$$\begin{cases} \dot{X} = aX - bXY, \\ \dot{Y} = -dY + cXY; \end{cases} \quad (1)$$

где  $a > 0$  – скорость роста объема загрязнений в сточных водах,

$b > 0$  и  $d > 0$  – параметры, описывающие эффективность очистки загрязнений в сточных водах,

$c > 0$  – устаревание и выработка технологий очистки загрязнений сточных вод.

2) модели процесса очистки сточных вод [9].

$$\begin{cases} \dot{u} = a - bu - \frac{uv}{1+u} \\ \dot{v} = -v + \frac{cuv}{1+u} \end{cases} \quad (2)$$

где  $u$  – объем (концентрация) загрязнений в сточных водах;

$v$  – объем уловленных загрязнений в момент времени  $t$ ,

$a > 0$  – мощность источника загрязнения,  $b$  и  $c$  — положительные постоянные.

Для определения параметров, входящих в систему, воспользуемся следующими численными методами: численное дифференцирование, метод наименьших квадратов и т.п.

Метод наименьших квадратов – метод оценки параметров модели на основании экспериментальных данных, содержащих случайные ошибки. В основе метода лежат следующие рассуждения: при замене точного (неизвестного) параметра модели приблизительным значением необходимо минимизировать разницу между экспериментальными данными и теоретическими (вычисленными при помощи

предложенной модели). Это позволяет рассчитать параметры модели с помощью МНК с минимальной погрешностью.

Мерой разницы в методе наименьших квадратов служит сумма квадратов отклонений действительных (экспериментальных) значений от теоретических. Выбираются такие значения параметров модели, при которых сумма квадратов разностей будет наименьшей:

$$\sum_i (Y_i - y_i)^2 = \min$$

где  $Y$  – теоретическое значение измеряемой величины,  $y$  – экспериментальное.

При этом полученные с помощью метода наименьших квадратов параметры модели являются наиболее вероятными [10].

Теперь воспользуемся описанным методом для определения коэффициентов  $a, b, c, d$  (система (1)) и  $a, b, c$  (система (2)):

1) При помощи численного дифференцирования получаем переопределенные системы

для модели (1):	для модели (2):
14.0 = -161c + 33488d,	14.0 = -161c + 160.2c,
21.0 = 208a - 33488b,	21.0 = a - 208b - 160.2,
14.0 = 229a - 40075b,	14.0 = a - 229b - 174.2,
17.0 = -175c + 40075d,	17.0 = -175 + 174.2c,
-6.0 = 243a - 46656b,	-6.0 = a - 243b - 191.2,
11.0 = -192c + 46656d,	11.0 = -192 + 191.2c,
-5 = -203c + 48111d,	-5 = -203 + 202.1c,
22.0 = 237a - 48111b,	22.0 = a - 237b - 202.1,
12 = -198c + 51282d,	12 = -198 + 197.2c,
12.0 = 259a - 51282b,	12.0 = a - 259b - 197.2,
32 = -210c + 56910d,	32 = -210 + 209.2c,
29.4 = 271a - 56910b,	29.4 = a - 271b - 209.2,
7 = -242c + 72696.8d,	7 = -242 + 241.2c,
-35.4 = 300.4a - 72696.8b,	-35.4 = a - 300.4b - 241.2,
-29 = -249c + 65985d,	-29 = -249 + 248.1c,
-10.0 = 265a - 65985b,	-10.0 = a - 265b - 248.1,
-2 = -220c + 56100d,	-2 = -220 + 219.1c,
6.0 = 255a - 56100b.	6.0 = a - 255b - 219.1

2) Решаем переопределенные системы методом наименьших квадратов [10]. Получаем нормальные системы, которые имеют следующий вид:

для модели (1):

$$\begin{aligned} -1.2 \cdot 10^8 a + 2.6 \cdot 10^{10} b &= -1.4 \cdot 10^6, \\ 5.8 \cdot 10^5 a - 1.2 \cdot 10^8 b &= 10651.2, \\ 386888c - 10 \cdot 10^7 d &= -9455, \\ -10 \cdot 10^7 c + 2.6 \cdot 10^{10} d &= 2.1 \cdot 10^6. \end{aligned}$$

для модели (2):

$$3.8 \cdot 10^5 c = 3.9 \cdot 10^5,$$

$$9a - 2267.4b = 1895.5,$$

$$-2267.4a + 4.9 \cdot 10^5 b = -4.8 \cdot 10^5.$$

3) Находим коэффициенты  $a, b, c, d$  и  $a, b, c$

для модели (1):	для модели (2):
$a := 0.4;$	$a := 218.1;$
$b := 0.002;$	$b := 0.03;$
$c := -0.4;$	$c := 1.03.$
$d := -0.001.$	

Проверяем адекватность моделей (рис.1–2).  
Вычисляем невязку по формуле

$$\frac{\sqrt{\sum (x_i - x_i^*)^2 + (y_i - y_i^*)^2}}{\sqrt{\sum x_i^2 + y_i^2}}, \text{ получаем } \delta 1 = 9\%,$$

$\delta 2 = 23\%$  для модели (1) и (2) соответственно.

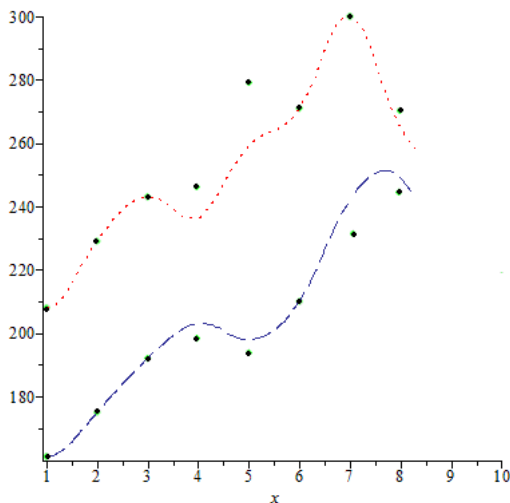


Рис.1. Результаты расчетов по модели (1) (пунктирная  $X(t)$  и штриховая  $Y(t)$  линии). Точки соответствуют исходным данным.

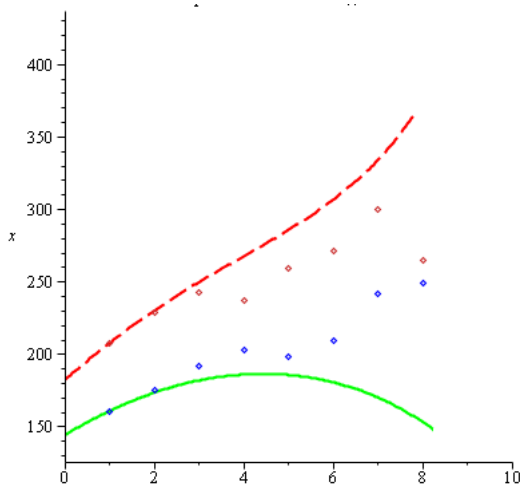


Рис.2. Результаты расчетов по модели (2) (штриховая  $u(t)$  и сплошная  $v(t)$  линии). Точки соответствуют исходным данным.

Модели изображены плавными линиями, а данные – точками. Легко заметить, что модель Лотки–Вольтерры более точно отображают рассматриваемый процесс (рис.1).

**3. Выводы.** В результате изучения процесса загрязнения гидросферы был проведен анализ данных. Построены математические модели этого процесса. Использованы численные методы решения задачи – нахождение параметров модели. Произведен сравнительный анализ выбранных моделей и проверка их адекватности. Модель Лотки–Вольтерра (1) адекватно описывает процесс загрязнения сточных вод, модель (2) требует уточнения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Государственный доклад «О состоянии окружающей природной среды Ростовской области в 1995 году». Под общ. ред. В.Д. Гребенюка, В.Н. Агеева, М.В. Парашенко. Ростов-на-Дону. – 1996г. – 164 с.
2. Государственный доклад «О состоянии окружающей природной среды Ростовской области в 2000 году». Под общ. ред. В.П. Водолацкого, П.П. Ульянова, М.В. Парашенко. Ростов-на-Дону. – 2001. – 136 с.
3. Экологический вестник Дона «О состоянии окружающей среды и природных ресурсов Ростовской области в 2003 году». Под общ. ред. С.М. Назарова, В.М. Остроуховой, М.В. Парашенко. Ростов-на-Дону. – 2004. – 264 с.
4. Экологический вестник Дона «О состоянии окружающей среды и природных ресурсов Ростовской области в 2008 году». Под общ. ред. С.Г. Курдюмова, Г.И. Скрипки, М.В. Парашенко. Ростов-на-Дону. – 2009. – 356 с.
5. Экологический вестник Дона «О состоянии окружающей среды и природных ресурсов Ростовской области в 2009 году». Под общ. ред. С.Г. Курдюмова, Г.И. Скрипки, М.В. Парашенко. Ростов-на-Дону. – 2010. – 372 с.
6. Доклад «Об экологической ситуации в Ростовской области за 2010 год». Ростов-на-Дону. – 2011.
7. Ризниченко Г.Ю., Рубин А.Б. Математические модели биологических продукционных процессов. Учебное пособие. М.: Изд-во МГУ. – 1993. – 302 с.
8. Романов М.Ф., Федоров М.П. Математические модели в экологии. – Спб.: «Иван Федоров», 2003, – 240 с.
9. Братусь А.С., Новожилов А.С., Платонов А.П. Динамические системы и модели в биологии. М.: ФИЗМАТЛИТ. – 2010. – 400 с.
10. Демидович В.П., Марон И.А., Шувалова Э.Э. Численные методы анализа. М: Наука. – 1967. – 406 с.