

УДК 621.921.34–492.2:539.215

ЭКСТРАПОЛЯЦИОННО-АФФИННАЯ 3D МОДЕЛЬ ЗЕРНА ПОРОШКОВ СВЕРХТВЕРДЫХ МАТЕРИАЛОВ И ЕЕ ИНЖЕНЕРИЯ*Петасюк Г.А.*

Институт сверхтвердых материалов им. В.Н. Бакуля НАН Украины, Киев, Украина

Предложена новая 3D модель зерна порошков сверхтвердых материалов, основанная на использовании математического аппарата отображения аффинного пространства, описаны алгоритмы ее инженерии. На примере числа зерен в одном карате шлифпорошков синтетического алмаза приведены результаты сравнительной оценки адекватности предложенной 3-D модели, подтверждающие ее преимущество над другими известными 3-D моделями.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: сверхтвердые материалы, шлифовальные порошки, синтетические алмазы, 3D модель.

ЭКСТРАПОЛЯЦІЙНО-АФІННА 3D МОДЕЛЬ ЗЕРНА ПОРОШКІВ НАДТВЕРДИХ МАТЕРІАЛІВ ТА ЇЇ ІНЖЕНЕРІЯ*Петасюк Г.А.*

Запропоновано нову 3D модель зерна порошків надтвердих матеріалів, яка заснована на використанні математичного апарату відображення афінного простору, та описані алгоритми її інженерії. На прикладі числа зерен в одному караті шліфпорошків синтетичного алмазу наведені результати порівняльної оцінки запропонованої 3-D моделі, які підтверджують її перевагу над іншими відомими 3-D моделями.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: надтверді матеріали, шліфувальні порошки, синтетичні алмази, 3D модель

EXTRAPOLATION AFFINE 3D MODEL OF POWDER GRAINS OF SUPERHARD MATERIALS AND ITS ENGINEERING*Petasjuk G.A.*

A new 3D model of grain powder of superhard materials based on mathematical apparatus of affine space mapping is proposed and the algorithms for its engineering are described. On the example of the number of grains in one karate of synthetic diamond grinding powders the comparative estimations of the adequacy of the proposed 3D model that confirm its advantage over other well-known 3D models are given.

KEY WORDS: superhard materials, grinding powders, synthetic diamonds, 3D model.

1. Введение. 3D модель зерен абразивных порошков является важным методологическим элементом в задачах разработки компьютерно-аналитических методов диагностики их эксплуатационных свойств и исследования процессов алмазно-абразивной обработки. Для удобства сравнительного анализа 3D моделей зерна введем понятие кратности их параметров. 3D модели в форме куба или шара являются однопараметрическими. В первом случае единственным определяющим параметром является ребро куба, во втором – диаметр или радиус шара. Примерами двухпараметрических 3D моделей зерна являются параллелепипед с основанием в форме квадрата, прямой круговой цилиндр, эллипсоид вращения. Модель в форме трехосного эллипсоида является трехпараметрической. Здесь определяющими параметрами выступают полуоси эллипсоида.

Непосредственному использованию 3D модели зерна в различных прикладных задачах предшествует процедура ее адаптации к реальному порошку. Такая адаптация (настройка) сводится к отождествлению параметров выбранной 3D модели с фактическими размерными и (или) геометрическими характеристиками проекции зерна. В результате такого отождествления принятая 3D модель унаследует от зерна некоторые реальные или псевдореальные (виртуальные) его размерные и геометрические характеристики. Понятно, что чем больше 3D модель унаследовала характеристик зерна, тем она более адекватна. Под термином реальные мы здесь подразумеваем характеристики, которые могут быть измерены непосредственно – то ли с помощью измерительных инструментов (приборов), то ли широко распространенными сейчас методами цифровой обработки изображений.

Примерами реальных характеристик зерен могут служить, например, длина, ширина, площадь и периметр его проекции, высота зерна. В тоже время такие часто используемые на практике характеристики зерен как средний или эквивалентный диаметр, средний кубический размер являются примерами псевдореальных размеров. Такое название отражает тот факт, что являются абстрактными понятиями. Они определяются соответственно как среднее арифметическое длины и ширины проекции зерна, как диаметр круга, площадь которого равна площади проекции зерна, и как сторона квадрата, площадь которого равна площади проекции зерна. Обычно на практике для 3D модели в форме куба адаптация осуществляется на основании информации по обобщенному среднему размеру зерен или по площади проекции, для 3D модели в форме шара – исключительно по площади проекции [1–3].

Пространственно-геометрическая модель зерна в форме эллипсоида унаследует три параметра фактического зерна – длину проекции, ширину его проекции и его высоту. Отметим также и то, что со времен работ [2, 3] какого-либо продвижения в сторону более адекватного аналога зерна, т. е. 3D модели зерна, количество унаследованных фактических параметров которой было бы больше трех, не было. Поэтому актуальной является разработка 3D модели зерна с большим, чем у известных 3D моделей количеством унаследованных фактических параметров, которая более адекватно описывала бы фактическую пространственно-геометрическую форму зерна. Разработка такой 3D модели зерна порошков сверхтвердых материалов (СТМ) и является целью настоящей работы.

2. Математический аппарат, используемый для описания экстраполяционно-аффинной 3D модели зерна. В настоящей работе в качестве геометрического аналога зерна СТМ впервые предлагается принимать пространственное эллипсоидоподобное тело (рис.1, а), образованное однопараметрическим отображением замкнутой плоской кривой, называемой прообразом. Фактическим прообразом этого отображения служит контур (граница) изображения зерна (рис. 1, б).

Теоретические основы конструирования поверхностей, пространственных и плоских кривых методом отображения аффинного пространства и используемый для этого математический аппарат описаны в работе [4]. В нашем случае такое отображение включало следующие преобразования аффинного пространства:

1) плоскую гомотегию g относительно репера 1 (рис. 1,б), аффинный параметр – коэффициент гомотетии g , скорость его изменения $V_g = \text{const}$, связь между аффинным и независимым параметрами $g = 1 + V_g t$;

2) параллельный перенос относительно того же репера 1 в направлении, составляющем с осями X_1 ,

Y_1, Z_1 углы $\pi/2, 0$ и $\pi/2$, аффинный параметр – длина вектора переноса l , скорость его изменения $V_l = \text{const}$, связь между аффинным и независимым параметрами $l = V_l t$.

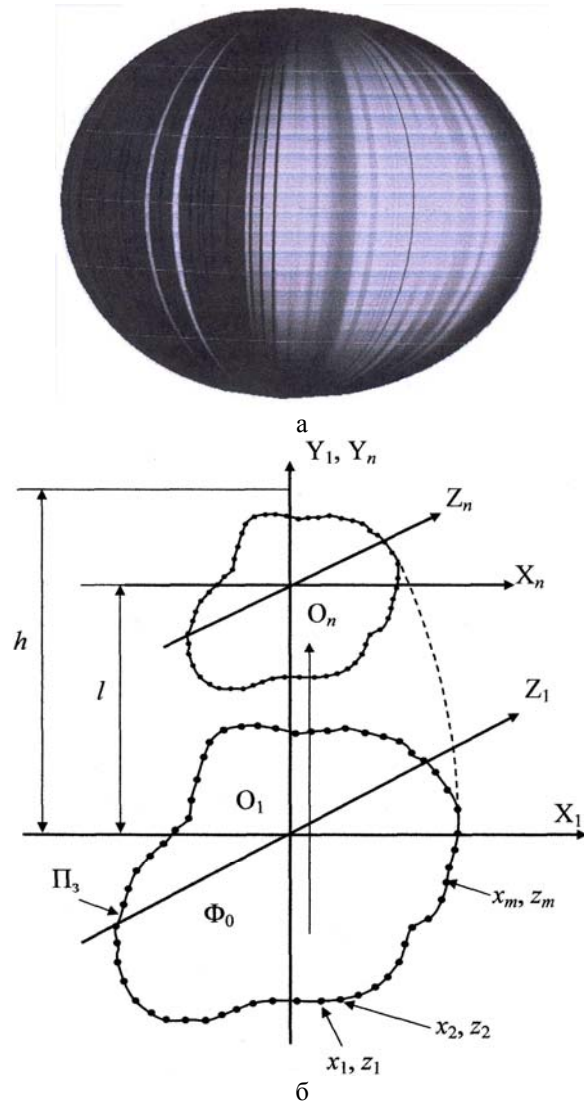


Рис. 1 Экстраполяционно-аффинная 3D-модель зерна порошков сверхтвердых материалов (а) и схема его построения (б).

Гомотетия и перенос происходят одновременно, их параметры – функции одного и того же независимого параметра – времени t . Матрица отображающих операторов g, l имеет вид:

$$m_{gl} = \begin{bmatrix} g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Векторное и матричное структурные (в аффинных параметрах) уравнения для рассматриваемого отображения аффинного пространства в однородных координатах, а также соответствующие им параметрические (в независимых параметрах) уравнения есть такими:

$$\vec{r} = g \cdot \vec{r}_1 + \vec{l}; \quad (1)$$

где $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1, 1)$ – прообраз, $\vec{r} = (x, y, z, 1)$ – результат отображения;

$$m_r = m_{gl} \cdot m_{r_1}; \quad (2)$$

где $m_1 = (x_1, y_1, z_1, 1)^T$, $m_r = (x, y, z, 1)$ – матрицы прообраза и образа (результата отображения) соответственно; $x = g \cdot x_1$, $y = g \cdot y_1$, $z = g \cdot z_1$, T – знак транспонирования.

В уравнениях (1) как независимый параметр может быть принят любой из аффинных параметров, например l , а другой аффинный параметр функционально связывается с параметром, принятым в качестве независимого.

Прообразом отображения (1), (2) выступает контур изображения зерна, т. е., замкнутая плоская линия, для которой вводится обозначение Π_3 . Плоскость, в которой лежит это изображение, совмещается с плоскостью $Y=0$ (рис. 1, б). Поскольку аналитическое описание изображения зерна затруднительно, то прообраз будем задавать дискретно, в виде набора пар чисел, каждая из которых является x , z координатами зафиксированного количества его точек. Процедура оцифровки контура изображения зерна может быть осуществлена с помощью программных средств MatLab. Однако значительно проще данную задачу решить с использованием программы WINDIG. Плоскую фигуру, образованную замкнутой кривой Π_3 , будем обозначать Φ_0 .

Что касается аффинных параметров, то, как уже отмечалось, независимым является перенос, а гомотетия выражается через него. Для получения указанной связи в аналитическом виде будем предполагать, что траекторией движения (переноса) каждой дискретной точки прообраза $\{x_m, z_m\}$, ($m=1, 2, 3, \dots, M$, где M – количества дискретных его точек) есть эллипс с полуосями: h в направлении оси Y , общей для всех точек прообраза, и $a_m = \sqrt{x_m^2 + z_m^2}$ в плоскости $Y=0$. Уравнение такого эллипса, проходящего через дискретную точку с номером m , будет:

$$\frac{x_m^2}{a_m^2} + \frac{y_m^2}{h^2} = 1. \quad (3)$$

Выражение (3) представляет собой M уравнений в каждой из систем координат X_m, Y_m , полученных поворотом системы X_1, Y_1 на угол $\alpha = \arctg(z_m/x_m)$. Искомую связь между аффинными параметрами получим, задаваясь в (3) длиной вектора переноса l :

$$\frac{x_{m,l}^2}{a_m^2} + \frac{l^2}{h^2} = 1. \quad (4)$$

Коэффициент гомотетии представляет собой отношение $x_{m,l}/a_m$. Определяя $x_{m,l}$ из (4) и составляя такое отношение, после упрощения получаем:

$$g = \frac{\sqrt{h^2 - l^2}}{h}. \quad (5)$$

Анализ выражения (5) показывает, что в правую его часть входят только l и h ; l – как аргумент функции g ; h – как ее параметр. Важным для последующего численного определения объема зерна и площади его поверхности есть то, что коэффициент гомотетии g не зависит от координат (x_m, z_m) контура изображения зерна. С учетом этого, а также некоторых допущений, которые будут оговорены ниже, процедура оцифровки осуществляется только для визуализации принятой механической модели зерна. Вычисление объема и площади поверхности зерна производится только с использованием имеющейся информации по размерным характеристикам, площади и периметру проекции зерна. В этом случае в оцифровке контура изображения нет необходимости.

3. Алгоритмы построения и численного определения площади поверхности и объема экстраполяционно-аффинной 3D модели зерна.

При численном определении объема и площади поверхности зерен высота тела T как пространственно-геометрической модели зерна отождествляется с высотой зерна. Принимая во внимание симметрию принятой 3D модели зерна относительно плоскости $Y=0$, вычисления достаточно провести только для одной из двух ее частей, например, для верхней. Алгоритм такого численного решения сводится к следующему. Полуось Y разбиением $R = \{y_0=0, y_1, y_2, \dots, y_{N-1}, y_N=h\}$, (N – число точек разбиения) делится на ряд отрезков. Длина Δ_n каждого из таких отрезков определяется как разность $(y_{n+1} - y_n)$. Эта длина должна быть постоянной для каждого из M эллипсов (3) и переменной при переходе от y_n к y_{n+1} ($n=1, 2, \dots, N$). Критерием выбора значения Δ_n служит требование, чтобы разность между значениями $x_{m,n}$ и $x_{m,n+1}$, которые соответствуют значениям y_n, y_{n+1} , не превышала фиксированной малой постоянной величины ε , т. е. условие:

$$(x_{m,n} - x_{m,n+1}) \leq \varepsilon. \quad (6)$$

Это требование может быть трансформировано в зависимость $y_{n+1} = f(y_n, \varepsilon)$. Для этого следует принять во внимание следующие обстоятельства. Обе точки $x_{m,n}$ и $x_{m,n+1}$ являются точками эллипса с полуосями a_m и h . Полуось h является общей для всех эллипсов. Поэтому если условие (6) выполняется для эллипса, проходящего через точку с минимальным значением a_m , то оно будет выполняться и для всех остальных эллипсов, проходящих через точки контура Π_3 . Обозначим это минимальное значение $a_m = a_{min}$ через a и требование (6) будем выполнять именно для эллипса с этой полуосью. Поскольку минимальный диаметр проекции зерна d_{min} известен, то можно положить $a = d_{min}/2$. С учетом изложенного выше находим:

$$x_n = a \sqrt{1 - \frac{y_n^2}{h^2}}, \quad x_{n+1} = a \sqrt{1 - \frac{y_{n+1}^2}{h^2}}.$$

Составляя теперь разность $x_n - x_{n+1}$ и приравнивая ее ε (наиболее неблагоприятный крайний случай) после соответствующих преобразований получаем зависимость $y_{n+1} = f(y_n)$ в виде:

$$\Delta y_{n+1} = y_n - \sqrt{h^2 - \left(\sqrt{1 - \frac{y_n^2}{h^2}} - \frac{h}{a} \varepsilon \right)^2}.$$

Плоскостями, проходящими через точки $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{N-1}, y_N$, и параллельными плоскости $Y=0$, образуем ряд сечений рассматриваемой части тела T . Каждое такое сечение будет представлять собой плоскую фигуру, аналогичную фигуре Φ_0 , но уменьшенную на коэффициент гомотетии. Два таких друг за другом следующих сечения образуют пространственное тело – эллипсоидоподобный пояс, верхнее и нижнее основания которого повторяют форму фигуры Φ_0 , поскольку получены из нее путем гомотетии. Предполагается, что известны такие параметры фигуры Φ_0 как площадь (S_0) и длина ее контура (периметр, L_0), минимальный (d_{min}) и максимальный (d_{max}) ее размеры, а также высота зерна $H=2h$. Измерение фактических показателей этих характеристик зерна проводилось на видео-компьютерном комплексе DiaInspect.OSM фирмы „Vollstaedt Diamant GmbH” [5], предназначенном для диагностики морфометрических характеристик абразивных порошков (минимальный и максимальный диаметры Feret, площадь проекции, периметр выпуклого и фактического изображения, эллиптичность, шероховатость контура и др. [6]).

Приближенное определение объема и боковой поверхности эллипсоидоподобного пояса будем производить, заменяя его усеченным коническим телом с площадями и периметрами нижнего и верхнего основания $s_{i,n} = S_0 g^2(y_n)$, $l_{i,n} = L_0 g(y_n)$ и $s_{i,n+1} = S_0 g^2(y_{n+1})$, $l_{i,n+1} = L_0 g(y_{n+1})$ соответственно и высотой $\Delta_n = y_{n+1} - y_n$. Здесь и ниже индекс i указывает на номер анализируемого зерна. Объем такого конического тела выразится формулой:

$$v_{i,n} = \frac{S_0 \Delta y_n}{3} [g^2(y_n) + g^2(y_{n+1}) + g(y_n)g(y_{n+1})], \quad (7)$$

При вычислении площади боковой поверхности эллипсоидоподобного пояса будем уподоблять его срезанному прямому не круговому конусу. Поскольку фактическими образующими рассматриваемого эллипсоидоподобного пояса есть дуги эллипсов, то тем самым вносится погрешность в конечный результат. С целью уменьшения этой погрешности как образующую срезанного не кругового прямого конуса будем принимать обобщенную дугу эллипсов (3), образованных разбиением R . Другой фактор, который позволяет уменьшить эту погрешность, это надлежащий выбор ε . Длину указанных дуг эллипсов находили численно, используя аналитическое представление

эллиптических интегралов 2-го рода полного $E(\phi, k)$ и обычного $E(q)$ [7] в виде бесконечного ряда [8]. Ниже эти ряды подаются в более компактном и в удобном для вычислений по сравнению с работой [8] виде:

$$E(\phi, k) = \frac{2 \cdot \phi}{\pi} E(q) + \sin(\phi) \cdot \cos(\phi) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} t_{2n} \cdot A_{2n} \cdot k^{2n}.$$

Здесь $k = \frac{\sqrt{a^2 - h^2}}{a}$ и $\phi = \arctg \frac{x}{y} \cdot \frac{h}{a}$ – модуль

и аргумент эллиптического интеграла 2-го рода соответственно; $q = \frac{a-h}{a+h}$ – модуль полного

эллиптического интеграла; $t_2 = \frac{1}{2}$;

$$t_{2n} = \frac{2n-3}{2n} t_{2n-2}, \quad n = 2, 3, 4, \dots;$$

$$A_{2n} = \frac{2n-1}{2n} + \frac{1}{2n} \sin^{2n-2}(\phi), \quad n=1, 2, 3, \dots.$$

Полный эллиптический интеграл 2-го рода также допускает представление в виде бесконечного ряда [8], который может быть приведен к виду:

$$E(q) = \frac{\pi}{2(1+m)} \sum_{n=0}^{\infty} \mu_{2n} q^{2n},$$

где $\mu_0 = 1$, $\mu_2 = \frac{1}{4}$, $\mu_{2n} = \frac{(2n-3)^2}{(2n)^2} \mu_{2n-2}$, $n =$

2, 3, 4, ...

Как обобщенную образующую срезанного конического тела будем принимать среднее значение длин дуг эллипсов, большими полуосями которых есть максимальный (d_{max}) и минимальный (d_{min}) размеры изображения соответственно. Длина дуги эллипса, большей полуосью которого является d_{max} , выражается через эллиптические интегралы 2-го рода как:

$$t_n^{d_{max}} = E(\phi_{n+1}^{d_{max}}, k) - E(\phi_n^{d_{max}}, k), \quad (8)$$

где $\phi_{n+1}^{d_{max}} = \arctg \frac{y_{n+1}}{d_{max} \sqrt{1 - \frac{y_{n+1}^2}{h^2}}}$,

$$\phi_n^{d_{max}} = \arctg \frac{y_n}{d_{max} \sqrt{1 - \frac{y_n^2}{h^2}}}, \quad k = \frac{\sqrt{d_{max}^2 - h^2}}{d_{max}}.$$

Формулы для $t_n^{d_{min}}$, $\phi_{n+1}^{d_{min}}$ и $\phi_n^{d_{min}}$ получаются из (8) заменой d_{max} на d_{min} . Тогда площадь боковой поверхности такого тела как усеченного конуса выразится формулой:

$$s_{i,n} = \frac{t_n^{d_{max}} + t_n^{d_{min}}}{2} \frac{g(y_n) + g(y_{n+1})}{2} L_0.$$

Объем V_i и площадь поверхности S_i зерна с номером i в соответствии с принятой пространственно-геометрической его моделью выразятся формулами:

$$V_i = 2 \cdot \sum_{n=1}^N v_{i,n}, \quad S_i = 2 \cdot \sum_{n=1}^N s_{i,n}, \quad (9)$$

где N – количество эллипсоидоподобных поясов, а $v_{i,n}$ и $s_{i,n}$ определяются по формулам (7) и (9) соответственно.

4. Сравнительный анализ адекватности новой экстраполяционно-аффинной 3D модели зерна порошков СТМ. Исследование адекватности экстраполяционно-аффинной 3D модели зерна проводилось путем сравнения расчетных и экспериментальных данных по числу зерен в одном карате шлифпорошков синтетического алмаза (СА). Расчетное определение данной важной для сферы порошков СТМ характеристики осуществлялось на базе экстраполяционно-аффинной 3D модели зерна по методике [9]. Необходимые исходные данные были получены с использованием прибора DiaInspect.OSM. Перечень морфометрических характеристик, диагностируемых этим и другими, подобными ему приборами, их физическая интерпретация подробно изложены в работе [10]. Одновременно с экстраполяционно-аффинной 3D моделью зерна проводились также расчеты указанной контрольной характеристик и для других известных 3D моделей – в форме трехосного эллипсоида, куба и шара. Полученные при этом результаты представлены в таблице. Там же приводятся собственные экспериментальные данные по числу зерен в одном карате использовавшихся в эксперименте шлифпорошков.

Таблица 2. Экспериментальные (Э) и расчетные (Расчет) при различных 3D моделях зерна данные по числу зерен n в одном карате шлифпорошков САи относительная погрешность Δ (%) расчетного определения

Марка и зернистость (мкм) шлифпорошка	Э n , шт	Расчет							
		Предложенная 3D модель		эллипсоид		сфера		куб	
		n , шт	Δ	n , шт	Δ	n , шт	Δ	n , шт	Δ
АС300	139	1366, 2,0		1320, 5,3		1151, 17,		602, 56,	
425/355	5	2 6		5 4		1 5		7 8	
АС250	149	1503, 0,6		1461, 2,1		1217, 18,		637, 57,	
425/355	3	1 7		1 4		3 5		4 3	
АС32-Н	179	1781, 0,7		1656, 7,6		969,7 45,		507, 71,	
425/355	4	3 1		9 4		9 7		7 7	
АС300	969	989,0 2,0		955,0 1,4		795,5 17,		416, 57,	
500/425		6		9 3		9 5		0	
АС200	568	566,2 0,3		526,3 7,3		340,6 40,		178, 68,	
600/500		5		4		0 4		6	
АС200	325	321,0 1,2		305,8 5,9		273,8 15,		143, 55,	
710/600		3		0		7 4		9	
АС200	234	231,5 1,0		224,1 4,2		196,6 16,		102, 56,	
800/710		7		2		2 9		0	

Эксперименты проводились на шлифпорошках АС300 40/45 (в меш, соответствует зернистости 425/355 в мкм), АС250 40/45 (425/355), АС32-Н 40/45 (425/355), АС300 35/40 (500/425), АС200 30/35 (600/500), АС200 25/30 (710/600), АС200

20/25 (800/710). С точность до 10^{-4} г на высокоточных аналитических весах ABS 120–4 отвешивали по одному карату каждого контрольного шлифпорошка. Затем под микроскопом МБИ-6 производили подсчет зерен в указанном их весе.

Сравнительный анализ представленных в таблице результатов показывает, что предложенный метод дает наименьшую погрешность расчетного определения числа зерен в одном карате шлифпорошков СА. Среднее значение погрешности составляет 1,17%, максимальное – не превышает 2,1%. Достигнутый уровень точности на основании оценок работы [2] можно квалифицировать как очень высокий. Такая точность достигнута благодаря использованию новой экстраполяционно-аффинной 3D модели зерна и современных средств диагностики морфометрических характеристик абразивных порошков. 3D модель зерна в форме трехосного эллипсоида дает менее точные, но приемлемые для практики результаты – погрешность составляет 5,1% и 7,64% соответственно. Что касается остальных 3D моделей зерна, то их использование приводит к очень большой (шар) и недопустимо большой (куб) погрешностям расчетного определения числа зерен в одном карате.

5. Выводы. Предложена новая экстраполяционно-аффинная 3D модель зерна порошков СТМ, которая обладает увеличенным числом унаследованных от реального зерна характеристик по сравнению с другими известными 3D моделями. Ее математическое ее описание позволяет на индивидуальном уровне частично учитывать фактическую форму зерен (в одной проекции). Благодаря этому достигается существенное уменьшение погрешности компьютерно-аналитической диагностики характеристик порошков СТМ с ее применением. Экспериментально подтверждено преимущество предложенной новой 3D модели зерна порошков СТМ по сравнению с другими известными его 3D моделями.

В последующем настоящее исследование целесообразно продолжить в направлении выяснения возможности применения предложенной экстраполяционно-аффинной модели зерна в качестве аналога зерен других абразивных порошков. Актуальной также является разработка технических и методических средств автоматизированного 3D сканирования большой совокупности зерен абразивных порошков и последующей автоматизированной обработки результатов сканирования средствами компьютерно-цифровой обработки изображений. Конечной целью при этом является получения полезных для практики абразивных порошков характеристик (в частности, высоты зерен), пригодных для математического моделирования различных испытательных процедур.

ЛИТЕРАТУРА

1. List E., Vollstaedt H., Frenzel J. Counting particles per carat by means of two-dimensional image analysis. *5th Zhengzhou Int. Superhard Materials and Related Products Conf.* – 2008. <http://www.vdiamant.de/Download/particles%20per%20carat%20ZISC-2008.pdf>.
2. Бакуль В.Н. *Определение числа частиц в одном карате алмазного порошка.* Киев: УкрНИИНТИ. – 1966. – 10 с.
3. Бакуль В.Н. Число зерен в одном карате – одна из важнейших характеристик алмазного порошка *Синтетические алмазы.* – 1976.– вып. 4.– С. 22–27.
4. Перепелица Б.А. Отображение аффинного пространства в теории формообразования поверхностей резанием. Харьков: Высшая школа. – 1981. – 107 с.
5. List E., Frenzel J, Vollstadt H. A new system for single particle strength testing of grinding powders *Industrial diamond review.* – 2006. – N1. – P. 42–47.
6. Петасюк Г. А. Диагностика морфометрических характеристик порошков надтвердых материалов засобами цифрової обробки зображень *Відбір і обробка інформації.* – 2009. – вип. 30 (106). – С. 138–145.
7. Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления:* В 3 т. Т. 2. М.: Наука. – 1969. – 800 с.
8. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. Пер. с англ. под ред. К.А. Семендяева. М.: Наука. – 1977. – 224 с.
9. Петасюк Г.А., Сирота Ю.В. Компьютерно-аналитический метод определения числа зерен в одном карате порошка синтетического алмаза *Инструментальный світ.* – 2012. – вып. 2 (54). – С. 35–38.
10. Богатырева Г.П., Петасюк Г.А., Базалий Г.А., Шамраева В.С. К вопросу однородности алмазных микропорошков по морфометрическим характеристикам. *Сверхтвердые материалы.* – 2009. – N2. – С. 71–81.