

Министерство образования и науки Украины
Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина

УДК 537.8
ББК 22.313
З 14

Рекомендовано к печати ученым советом механико-математического факультета Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина (протокол № 8 от 15.10.04)

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА

Методические указания для студентов IV курса
по специальности «Механика»

Рецензенты: доктор физико-математических наук, профессор Харьковского национального университета радиоэлектроники Нерух А. Г.;
доктор физико-математических наук, профессор Харьковского национального автомобильного университета Пятак А. И.

Основные законы электромагнетизма: Методические указания для студентов III курса по специальности «Механика» / Составитель доктор физико-математических наук, профессор Загинайлов Г. И. – Х.: ХНУ имени В. Н. Каразина, 2005. – 64 с.

Электромагнетизм является одним из самых сложных разделов классической физики, и его изучение, как правило, вызывает определенные трудности у студентов всех специальностей. Это свидетельствует о богатой и глубокой физике рассматриваемых явлений, а также об их практической значимости.

В данных методических указаниях изложены основные законы классической электродинамики, приведены примеры решения задач, а также предложены задачи для самостоятельного решения.

Данное руководство предназначается для студентов III курса механико-математического факультета специальности «Механика».

УДК 537.8
ББК 22.313

Харьков – 2005

© Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина
© Загинайлов Г. И., 2005
© Макет обложки Дончик И. М., 2005

Оглавление

1. Закон электромагнитной индукции	4
2. Квазистационарные переменные токи в линейных проводниках	7
3. Ток смещения	11
4. Уравнения Максвелла и их анализ	13
5. Замыкающие соотношения и граничные условия на поверхности раздела сред	15
6. Векторный и скалярный потенциалы. Уравнение Даламбера	19
7. Распространение электромагнитных волн	22
8. Запаздывающий и опережающий потенциалы	24
9. Вибратор Герца	25
10. Уравнение баланса энергии электромагнитного поля. Теорема Пойтинга. Импульс и момент импульса электромагнитного поля	33
11. Пондеромоторная сила для электромагнитного поля Максвеллов тензор натяжений. Сила Абрахама	36
12. Задачи с решениями	40
13. Упражнения и задачи для самостоятельной работы	59
Рекомендованная литература	61

1. Закон электромагнитной индукции

Обсуждается физическая сущность и математические формулировки закона электромагнитной индукции Фарадея

Электрическое и магнитное поля не связаны между собой только в том случае, когда они не меняются со временем. Если же поля не постоянны, то они уже не могут быть независимыми. Переменное магнитное поле всегда создает переменное электрическое поле и наоборот. Первая сторона этой обоюдной взаимосвязи заключается в явлении электромагнитной индукции, открытом М. Фарадеем в 1831 г. Оно состоит в том, что если возле проводника двигать магнит либо проводник, по которому течет постоянный ток, то в первом проводнике возникает электрический ток без всяких посторонних источников (см. рис.1). Ток возникает и тогда, когда проводник движется, а магнит неподвижен. Наконец, ток возникает в неподвижном проводнике и в том случае, если возле него находится другой неподвижный проводник не с постоянным, а с переменным током.

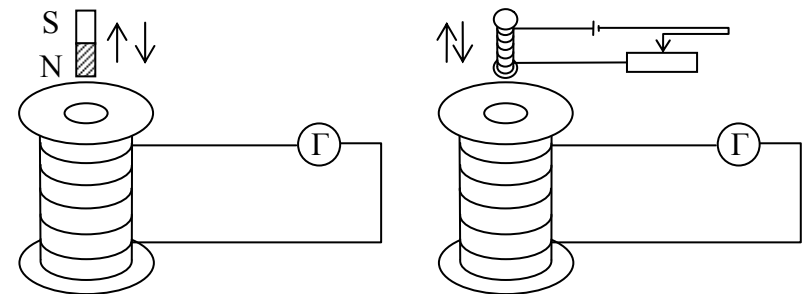


Рис. 1. опыты Фарадея

Эмпирически было установлено что для возникновения тока в замкнутом проводнике существенно изменение магнитного потока через контур проводника, а не способ которым оно достигается. Математическая формулировка закона электромагнитной индукции, данная в 1845 г. Ф.Э.Нейманом, устанавливает связь между электродвижущей силой (э.д.с.) индукции e и изменением магнитного потока F через контур:

$$e = - \frac{dF}{dt}. \quad (1)$$

Здесь э.д.с. определяется как интеграл по контуру тока от силы, действующей на единичный положительный заряд

$$e = \frac{1}{q} \oint_C \vec{f} d\vec{l} . \quad (2)$$

Интегрирование проводится в направлении, совпадающем с направлением тока. Магнитным потоком, пронизывающим контур C называется поверхностный интеграл

$$F = \int_S \vec{B} d\vec{s} , \quad (3)$$

где интегрирование проводится по произвольной поверхности S , натянутой на контур C , $d\vec{s} = \vec{n} ds$ - ориентированный элемент поверхности, \vec{n} - нормаль к элементу поверхности ds , ориентированная таким образом, чтобы его направление и направление обхода контура C составляли правинтовую систему (если мы будем вращать правый винт по направлению обхода контура, то поступательное движение винта будет указывать направление нормали).

Таким образом, э.д.с. индукции равна взятой с обратным знаком производной по времени от магнитного потока, пронизывающего контур.

Знак минус в формуле (1) означает, что индукционный ток имеет такое направление, что его собственное магнитное поле стремится ослабить изменение магнитного потока, вызвавшего индукционный ток. Правило определяющее направление э.д.с. индукции было впервые сформулировано Э.Х. Ленцем в 1833 г. Ле Шателье, а затем Браун обобщили это правило на все физические явления.

Каким же образом переменное магнитное поле возбуждает электрический ток? Ответ был дан Д.Маквеллом: всякое изменение магнитного поля во времени возбуждает в окружающем пространстве электрическое поле, которое и является непосредственной причиной возникновения индукционного тока в проводнике.

Между максвелловским и фарадеевским пониманием явления электромагнитной индукции имеется существенное различие. Согласно Фарадею, электромагнитная индукция состоит в возбуждении электрического тока, для наблюдения которого необходимо наличие замкнутого проводника. Согласно Максвеллу, электромагнитная индукция заключается в возбуждении электрического поля, а не тока и может наблюдаться в отсутствие проводников.

В случае неподвижного контура $\vec{f} = q\vec{E}$, где \vec{E} - напряженность электрического поля, порождаемого переменным магнитным полем. Подставляя это выражение в (1) находим непосредственную связь ме-

жду индуцированным электрическим полем и переменным магнитным полем:

$$\oint_C \vec{E} d\vec{l} = - \frac{dF}{dt} . \quad (4)$$

Используя определение циркуляции произвольного вектора по замкнутому контуру как интеграла по контуру от этого вектора, мы приходим к следующей формулировке закона электромагнитной индукции для неподвижного проводника:

циркуляция электрического поля, индуцируемого в проводящем контуре переменным магнитным полем, равна взятой с обратным знаком производной по времени от магнитного потока, пронизывающего контур.

Символ частной производной по времени в (4) подчеркивает тот факт, что контур и натянутая на него поверхность неподвижны.

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Циркуляция электрического поля, возникающего при электромагнитной индукции отлична от нуля, в то время как циркуляция электростатического поля всегда равна нулю. Иными словами, при электромагнитной индукции возникает не потенциальное, а вихревое электрическое поле.

В общем случае, когда проводник движется в переменном магнитном поле, индукционный ток возбуждается как электрической силой $q\vec{E}$, так и магнитной силой $q\vec{v} \times \vec{B}$. Таким образом, во всех случаях индукционный ток вызывается полной силой Лоренца

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) . \quad (5)$$

Из магнитостатики известно, что контур с током создает в окружающем пространстве магнитное поле. Если в некотором контуре течет изменяющийся ток, то собственное магнитное поле этого тока также будет переменным во времени. Однако, как было указано выше, переменное магнитное поле любой природы создает переменный поток магнитной индукции. Пронизывая тот же самый контур, которым создается переменное поле, этот поток вызывает в нем же индукционный ток. Это явление называется самоиндукцией. Величина собственного магнитного потока пропорциональна силе тока I :

$$F = LI , \quad (6)$$

где L - коэффициент, называемый индуктивностью контура. Индуктивность зависит от формы и размеров контура, а также от магнитных свойств окружающей среды. Если контур жесткий и поблизости от него нет ферромагнетиков, то индуктивность является величиной постоянной и не зависит от силы тока.

Строго говоря, эта формула справедлива для постоянного тока, но ею можно пользоваться также и в случае переменного тока, если только он изменяется достаточно медленно. Необходимо, чтобы время, в течение которого ток претерпевает существенное изменение, было велико по сравнению со временем, которое требуется свету, чтобы пройти расстояние порядка размеров контура (в случае системы контуров расстояние порядка размеров этой системы):

$$T \gg \frac{l}{c},$$

где c – скорость света, l – линейный размер системы.

Такие токи называются квазистационарными. Следует отметить, что все закономерности и соотношения для постоянных токов являются справедливыми и для квазистационарных токов.

Единицей индуктивности в системе СИ является генри (Гн). Согласно (5) индуктивностью 1 Гн обладает контур, магнитный поток сквозь который при токе 1 А равен 1 вебер (Вб), значит 1 Гн = 1 Вб/А.

Т. к. переменное магнитное поле индуцирует токи посредством генерации электрического поля, очевидно, что индукционные токи могут возбуждаться и в сплошных массивных проводниках. В этом случае их называют токами Фуко или вихревыми токами. Электрическое сопротивление массивного проводника мало, поэтому токи Фуко могут достигать большой силы. Причем благодаря индукционному взаимодействию различных элементов тока между собой происходит перераспределение плотности тока по сечению проводника, в результате чего ток сосредотачивается в поверхностном слое проводника. Концентрация переменного тока вблизи поверхности называется скин-эффектом.

2. Квазистационарные переменные токи в линейных проводниках

Излагаются основные методы расчета цепей переменного квазистационарного тока

Простота генерирования переменного тока, легкость его трансформации и возможность превращения его энергии в механическую работу привели к широчайшему использованию переменных токов на практике. Выясним роль индуктивности и емкости в цепи переменного тока. Рассмотрим проводящий контур изображенный на рис. 2, в котором действует переменная э.д.с. или приложено переменное напряжение.

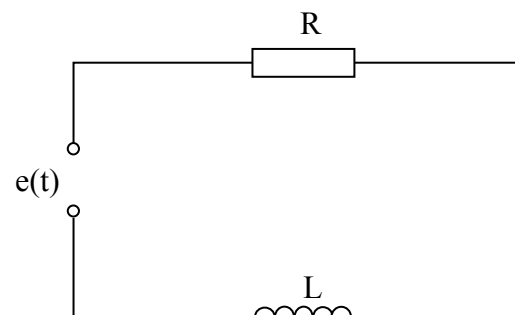


Рис. 2. Контур с индуктивностью

Используем второе правило Кирхгофа для постоянных токов (однако, которое можно применять и для квазистационарных токов). Согласно ему для любого замкнутого контура сумма э.д.с. равна сумме падений напряжения на участках контура. В нашем случае это записывается в виде: $e(t) - L di / dt = Ri$, или

$$L \frac{di}{dt} + Ri = e(t) \quad (7)$$

Возможна и иная (формальная) трактовка индукционным процессам в цепи. Для удобства можно ввести падение напряжения на индуктивном элементе цепи $u_L = L(di / dt)$, однако, не рассматривая его как источник э.д.с. Тогда по тому же правилу Кирхгофа $e(t) = u_R + u_L$, где $u_R = Ri$ что также приводит к (7).

Уравнение (7) представляет собой неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка с известной правой частью. В общем случае решение уравнений такого типа складывается из частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения (без правой части). Неизвестные константы подбираются так, чтобы удовлетворить начальным условиям.

Ниже, однако, рассмотрим один важный частный случай, когда в цепи действует синусоидальная э.д.с. $e(t) = U \cos \omega t$, где U – амплитуда, ω – частота приложенной э.д.с. Чтобы найти частное решение в этом случае, удобно воспользоваться комплексным методом. Согласно ему ток ищется в виде $i(t) = \text{Re}(I e^{i\omega t})$, где I – некоторая комплексная константа, называемая комплексной амплитудой тока. Тогда э.д.с. можно представить в виде $e(t) = \text{Re}(U e^{i\omega t})$. Подставляя $i(t)$ и $e(t)$ в

При переменной э.д.с. $e(t)$ в контуре переменным будет и ток $i(t)$. В таком случае в контуре возникнет добавочная э.д.с. – э.д.с. самоиндукции $- L di / dt$. Таким образом, суммарная э.д.с. составит $e(t) - L di / dt$. Ис-

таким виде в (7), внося под знак L и R , (т. к. они вещественны) и учитывая линейность дифференциального уравнения (7), знак Re в этом уравнении можно опустить. В результате имеем:

$$L \frac{d}{dt} (Ie^{i\omega t}) + RIe^{i\omega t} = Ue^{i\omega t} \quad (8)$$

Отсюда находим $I = U / Z$, где $Z = R + i\omega L$, $i \in \sqrt{-1}$. Величину Z называют комплексным сопротивлением или импедансом цепи. Подставляя I в представление для тока, находим $i(t)$.

В отличие от постоянного тока переменный ток может протекать по цепи, в которую включен конденсатор. Это связано с возникновением переменного заряда на обкладках конденсатора. Рассмотрим простейшую схему такой цепи (см. рис. 3).

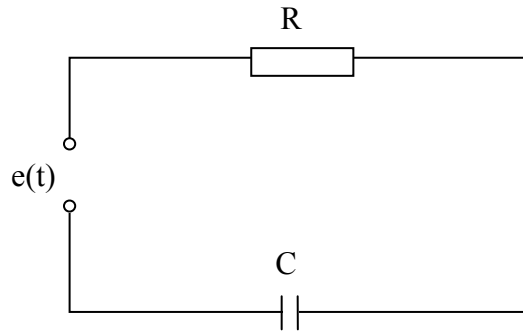


Рис. 3. Контур с емкостью

Для определения тока в этом контуре опять воспользуемся вторым правилом Кирхгофа, согласно которому $e(t) = u_R + u_C$, где $u_C = q / C$ – напряжение на обкладках конденсатора, q – заряд на обкладках конденсатора, C – емкость конденсатора. Т. к. $i(t)$ и q связаны очевидным соотношением $i(t) = dq / dt$, то второе правило Кирхгофа в данном случае можно представить в виде дифференциального уравнения для заряда q :

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = e(t). \quad (9)$$

Это дифференциальное уравнение такого же типа как и (7) и может быть исследовано таким же образом. Оно позволяет найти заряд q , а

следовательно и ток $i(t)$. Для синусоидальной э.д.с. $e(t) = U \cos \omega t$ используя комплексный метод, легко убедиться что $q = \text{Re}(Qe^{i\omega t})$, где $Q = U / (i\omega R + C)$. Соответственно ток определится формулой $i(t) = \text{Re}(Ie^{i\omega t})$, где $I = U / Z$, $Z = R + 1 / i\omega C$.

Выяснив, как ведут себя порознь индуктивность и емкость при прохождении переменного тока, можно рассчитать любую цепь, в которой действует синусоидальное напряжение. При этом в случае синусоидального напряжения удобно использовать комплексный метод, считая что индуктивности L и емкости C соответствуют комплексные сопротивления $i\omega L$ и $1 / i\omega C$ соответственно. Каждая цепь строится из этих элементов, которые могут соединяться последовательно или параллельно. Как и в случае обычных сопротивлений, общее комплексное сопротивление последовательно соединенных элементов равно сумме их комплексных сопротивлений ($Z = Z_1 + Z_2 + \dots$). В случае параллельно соединенных элементов общее комплексное сопротивление находится из выражения $1 / Z = 1 / Z_1 + 1 / Z_2 + \dots$. В случае контура, изображенного на рис.4, $Z = R + i\omega L + 1 / i\omega C$.

Амплитуда тока I как функция частоты представлена на рис. 5. Она обращается в нуль при $\omega = 0$ и $\omega \rightarrow \infty$ и достигает максимума при резонансной частоте $\omega_0 = 1 / \sqrt{LC}$.

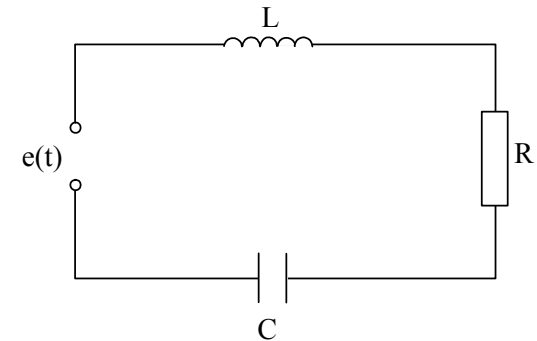


Рис. 4. Контур с индуктивностью и емкостью

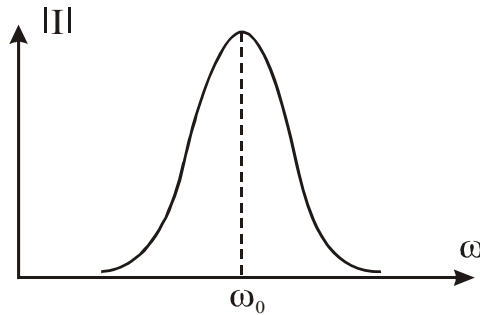


Рис. 5. Зависимость тока в контуре от частоты

Ширина этого максимума $\Delta\omega \sim R/L$, максимальное же значение тока $I_{\max} = U/R$. Поэтому если активное сопротивление R очень мало, то максимум будет очень резким. О резонансе в такой цепи говорят как о резонансе напряжений.

3. Ток смещения

Обсуждается физическое содержание тока смещения. Проводится учет тока смещения в уравнениях Максвелла

Постоянный ток не протекает в цепи с конденсатором. В то же время переменный протекает. Сила квазистационарного тока проводимости во всех последовательно соединенных элементах цепи является одной и той же. В конденсаторе ток проводимости, связанный с движением электронов не может существовать. Поэтому необходимо предположить, что в конденсаторе происходит некоторый процесс, который как бы замыкает ток проводимости, т. е. обеспечивает обмен заряда между обкладками конденсатора без переноса заряда между ними. Этот процесс называется током смещения. Рассмотрим цепь переменного тока с плоским конденсатором, изображенную на рис. 3. Между обкладками конденсатора имеется электрическое поле с напряженностью $E = s/e_0$, где s - плотность заряда на обкладках, e_0 - диэлектрическая проницаемость вещества между обкладками. Вектор электрической индукции между обкладками конденсатора равен $D = s = Q/S$, где Q - заряд на каждой из обкладок конденсатора, S - площадь обкладки. Сила тока в цепи равна $I = \oint Q / \oint t$. Отсюда следует, что

$$I_c = S \frac{\oint D}{\oint t}, \quad (10)$$

т. е. процессом, замыкающим ток проводимости в цепи, является изменение электрической индукции. Плотность тока смещения в пространстве между обкладками равна $j_c = I_c/S = \oint D / \oint t$. Учитывая, что направление j_c в каждой точке между обкладками совпадает с направлением $\oint D / \oint t$, можно (10) представить в векторной форме

$$\vec{j}_c = \frac{\vec{\oint D}}{\oint t}. \quad (11)$$

Сумму же тока смещения и тока проводимости называют *полным током*.

Следует иметь в виду, что ток смещения эквивалентен току проводимости, только в отношении способности создавать магнитное поле. Токи смещения существуют лишь там, где меняется со временем электрическое поле. В диэлектриках ток смещения состоит из двух существенно различных слагаемых. Так как вектор $\vec{D} = e_0\vec{E} + \vec{P}$, то отсюда видно, что плотность тока смещения складывается из «истинного» тока смещения $e_0\oint \vec{E} / \oint t$ и тока поляризации $\oint \vec{P} / \oint t$ - величины, обусловленной движением связанных зарядов. В том, что токи поляризации возбуждают магнитное поле, нет ничего неожиданного, ибо эти токи по своей природе не отличаются от токов проводимости. Принципиально новое содержится в утверждении, что и другая часть тока смещения $e_0\oint \vec{E} / \oint t$, которая не связана с движением зарядов, а обусловлена только изменением электрического поля, также возбуждает магнитное поле. Открытие этого явления - наиболее существенный и решающий шаг, сделанный Максвеллом при построении теории электромагнитного поля. Это открытие вполне аналогично открытию закона электромагнитной индукции. Следует также отметить, что открытие тока смещения является чисто теоретическим открытием.

Порождение магнитного поля током проводимости описывается уравнением:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j}. \quad (12)$$

Учитывая порождение магнитного поля током смещения, необходимо обобщить это уравнение следующим образом:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j}_c + \vec{j}, \quad (13)$$

тогда принимая во внимание (11) окончательно получаем уравнение:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{grad} D + \vec{j}, \quad (14)$$

являющееся одним из уравнений Максвелла.

4. Уравнения Максвелла и их анализ

Обсуждаются физический смысл и некоторые свойства системы уравнений Максвелла

Открытие тока смещения позволило Максвеллу создать единую теорию электрических и магнитных явлений. Закон электромагнитной индукции (4), теорема Гаусса из электростатики, теорема о циркуляции магнитного поля с учетом тока смещения и закон отсутствия в природе магнитных зарядов являются отдельными частями этой теории, которую можно представить в виде системы фундаментальных уравнений электродинамики, называемых уравнениями Максвелла. Этим уравнений четыре. Наиболее распространенной и употребительной является дифференциальная форма уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \operatorname{grad} B, \operatorname{div} \vec{B} = 0; \quad (15)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{grad} D + \vec{j}, \operatorname{div} \vec{D} = r. \quad (16)$$

Уравнения (15) также иногда называют первой парой уравнений Максвелла, а уравнения (16) – второй парой уравнений Максвелла.

Физическое содержание этих уравнений заключается в следующем:

1. Первое из уравнений (15) выражает закон электромагнитной индукции в дифференциальной форме. Т. е. оно является дифференциальной формой соотношения (4) и указывает на то, что изменяющееся магнитное поле является одним из возможных источников электрического поля.
2. Второе из уравнений (15) выражает закон отсутствия в природе магнитных зарядов.
3. Первое из уравнений (16) выражает закон, согласно которому магнитное поле порождается токами проводимости и токами смещения, которые и являются двумя возможными источниками магнитного поля.
4. Второе из уравнений (16) представляет собой дифференциальную форму теоремы Гаусса и свидетельствует о том, что вторым источником электрического поля являются электрические заряды.

Уравнения Максвелла обладают следующими свойствами:

а) они являются линейными и содержат только первые производные полей \vec{E} и \vec{B} по времени и пространственным координатам и первые степени электрических зарядов r и токов \vec{j} . Свойство линейности непосредственно связано со свойством суперпозиции, которое является независимым экспериментальным фактом: если два каких-либо поля удовлетворяют уравнениям Максвелла, то это относится и к сумме этих полей;

б) уравнения Максвелла содержат уравнение непрерывности. Что бы в этом убедиться, нужно взять дивергенцию от первого из уравнений (16). Учитывая, что дивергенция ротора равна нулю тождественно приходим к соотношению $\operatorname{div}(\operatorname{grad} D / \operatorname{grad} t + \vec{j}) = 0$. Меняя пространственную и временную производные в первом члене в левой части этого соотношения, и используя второе из уравнений (16), приходим к уравнению непрерывности для плотности электрического заряда $\operatorname{grad} r / \operatorname{grad} t + \operatorname{div} \vec{j} = 0$;

с) уравнения Максвелла являются релятивистски-инвариантными. Факт инвариантности уравнений Максвелла относительно преобразований Лоренца подтверждается многочисленными опытными данными. Вид уравнений Максвелла при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой не меняется, входящие в них величины преобразуются по определенным правилам;

д) уравнения Максвелла в общем случае не симметричны относительно электрического и магнитного полей. Это обусловлено отсутствием в природе магнитных зарядов. Стремление достигнуть симметрии уравнений Максвелла заставило Дирака выдвинуть гипотезу о существовании магнитных зарядов. Логических возражений против такой гипотезы нет. Однако, к настоящему времени они не обнаружены, несмотря на многочисленные попытки. Вместе с тем в нейтральной однородной непроводящей среде, где $r = 0$ и $\vec{j} = 0$, уравнения Максвелла приобретают симметричный вид:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \operatorname{grad} B, \operatorname{div} \vec{D} = 0; \quad (17)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{grad} D, \operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (18)$$

Симметрия уравнений относительно электрического и магнитного полей не распространяется лишь на знак перед производными $\nabla \vec{D} / \nabla t$ и $\nabla \vec{E} / \nabla t$.

5. Замыкающие соотношения и условия на границах разрыва материальных сред

Обсуждается полнота и совместность уравнений Максвелла, приводятся виды замыкающих соотношений и обсуждаются границы их применимости.

Формулируются условия на границах раздела материальных сред

Фундаментальные уравнения Максвелла в форме (15), (16) не составляют еще полной системы уравнений электромагнитного поля. Если их записать в координатной форме, то получится всего восемь уравнений, связывающих двенадцать функций (по три компоненты векторов \vec{E} , \vec{B} , \vec{D} и \vec{H} , распределения сторонних зарядов и токов r и j считаем заданным). Таким образом для нахождения распределения полей по заданному распределению сторонних зарядов и токов необходимо еще три уравнения. Фундаментальные уравнения Максвелла (15), (16) не содержат явно никаких величин характеризующих свойства среды. Т.о. необходимо дополнить эти уравнения соотношениями, в которые бы входили величины, характеризующие индивидуальные свойства среды. Эти соотношения называются замыкающими соотношениями или материальными уравнениями. Материальные уравнения получаются из молекулярных теорий поляризации, намагничивания или электропроводности среды. Для построения этих теорий необходимо разработать идеализированную модель среды. Далее применяя уравнения классической или квантовой механики, а также методы статистической физики можно установить связь между векторами \vec{D} и \vec{E} , а также \vec{B} и \vec{H} . Иногда вспомогательные поля \vec{D} и \vec{H} записываются в виде:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad \vec{H} = m_0^{-1} \vec{B} - \vec{J}; \quad (19)$$

вводя векторы поляризации \vec{P} и намагничивания среды \vec{J} . Тогда необходимо установить зависимость этих векторов от \vec{E} и \vec{B} соответственно.

Наиболее просты материальные уравнения в случае слабых электромагнитных полей, сравнительно медленно меняющихся в пространстве и во времени. В этом случае для изотропных неферромагнитных и

несегнетоэлектрических сред замыкающие соотношения могут быть записаны в виде:

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} = m m_0 \vec{H}, \quad (20)$$

где ϵ и m - относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, ϵ_0 и m_0 - диэлектрическая и магнитная постоянные вакуума. Электронная теория показала, что справедливость таких материальных уравнений связана с выполнением двух условий. Во-первых, за времена порядка периодов внутриатомных и внутримолекулярных колебаний электромагнитное поле должно меняться мало. Во-вторых, поле должно меняться слабо на расстояниях порядка межмолекулярных расстояний.

Исключая \vec{D} и \vec{H} из уравнений (15), (16) с помощью уравнений (20), получим, что имеется восемь уравнений для шести неизвестных величин (векторов \vec{E} и \vec{B}). Т.о. теперь система (15),(16) может оказаться переопределенной. Однако этого не возникает, т.к. первое и второе уравнения (15) не являются полностью независимыми. Это легко показать, взяв дивергенцию от первого уравнения (15). Т.к. дивергенция ротора тождественно равна нулю, имеем $\text{div}(\nabla \vec{B} / \nabla t) = 0$. В то же время продифференцировав второе из уравнений (15) по времени, имеем $\nabla(\text{div} \vec{B}) / \nabla t = 0$. Т.к. операторы временного и пространственного дифференцирования независимы, приходим к выводу, что в обоих случаях получается одно и то же уравнение. Т.е. второе из уравнений (15) является дифференциальным следствием первого и не устанавливает новых связей между искомыми функциями. Аналогично можно показать, что второе из уравнений (16) является дифференциальным следствием первого из уравнений (16) и уравнения непрерывности для сторонних зарядов $\nabla r / \nabla t + \text{div} j = 0$, распределение которых считается заданным. Для этого надо взять div от первого из уравнений (16). Из полученного соотношения $\text{div} j + \nabla(\text{div} \vec{B}) / \nabla t = 0$ исключаем $\text{div} j$ с помощью уравнения непрерывности. В результате получим $\nabla(\text{div} \vec{D}) / \nabla t = \nabla r / \nabla t$, что также следует из второго уравнения (16) после его дифференцирования по времени.

Т.о. имеем шесть независимых дифференциальных соотношений для шести неизвестных величин. Т.е. система является совместной. Более подробный анализ показывает, что решение системы уравнений (15), (16) и (20) является единственным при заданных граничных и начальных условиях.

Следует также отметить, что иногда уравнения (20) также включают в систему уравнений Максвелла. Однако на наш взгляд этого делать не стоит, т. к. уравнения (20) не обладают такой же общностью и фундаментальностью.

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме (15), (16) не имеют смысла в точках на поверхности раздела материальных сред, где свойства среды, а также напряженности полей меняются скачкообразно. В этом случае остаются справедливыми уравнения Максвелла в интегральной форме:

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = - \int \nabla \times \vec{B} / \nabla \times \vec{t} d\vec{s}, \quad \oint \vec{B} d\vec{s} = 0; \quad (21)$$

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \int \nabla \times \vec{D} / \nabla \times \vec{t} + \vec{j} d\vec{s}, \quad \oint \vec{D} d\vec{s} = \int \vec{r} dV, \quad (22)$$

которые обладают большей общностью, хотя менее употребительны и удобны для конкретных расчетов.

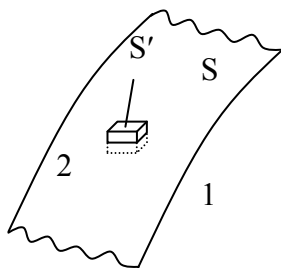


Рис. 6. Граница раздела двух диэлектриков

Можно, однако, достигнуть такой же общности и для дифференциальной формы уравнений Максвелла, если дополнить их граничными условиями, которым должно удовлетворять электромагнитное поле на границе раздела двух сред. Эти условия легко могут быть выведены из интегральной формы уравнений Максвелла.

Рассмотрим участок поверхности S между двумя диэлектриками (см. рис.6). Диэлектрик под поверхностью S обозначим цифрой 1, а диэлектрик над поверхностью цифрой 2. Пусть маленькая призма, верхнее основание которой находится в диэлектрике 2, а нижнее в диэлектрике 1, вырезает из поверхности S элемент площадью $S \checkmark$ настолько малый, что его можно считать плоским, а поля на площади $S \checkmark$ постоянными. Рассмотрим второе из уравнений (22) для этой призмы. Устремляя высоту призмы к нулю, получим, что величина верхнего и

нижнего оснований призмы стремится к $S \checkmark$, а интеграл от \vec{D} по боковой поверхности стремится к нулю. Считаем, что нормаль \vec{n} к элементу $S \checkmark$ направлена из диэлектрика 1 в диэлектрик 2. Тогда интеграл от \vec{D} по поверхности призмы будет равен сумме интегралов по основаниям. Интеграл по нижнему основанию при сделанных предположениях равен $\vec{D}_1 \vec{n}_1 S \checkmark$, где \vec{n}_1 внешняя нормаль к верхней поверхности призмы, интеграл по верхнему основанию равен $\vec{D}_2 \vec{n}_2 S \checkmark$, где \vec{n}_2 внешняя нормаль к верхней поверхности призмы. Т. к. $\vec{n}_1 = -\vec{n}$, $\vec{n}_2 = \vec{n}$, а объем призмы стремится к нулю, из второго уравнения (22) имеем $(\vec{D}_2 \vec{n} - \vec{D}_1 \vec{n}) S \checkmark = 0$. Таким образом, приходим к условию непрерывности нормальной составляющей вектора электрической индукции:

$$D_{2n} = D_{1n}. \quad (23)$$

Для получения граничных условий для вектора \vec{E} рассмотрим небольшой контур на границе раздела сред (см. рис. 7). Контур считаем настолько малым, что поля в точках контура можно считать постоянными. Верхняя часть контура находится в диэлектрике 2, а нижняя в диэлектрике 1. Рассмотрим первое из уравнений (21) для этого контура. Устремляя боковые стороны контура к нулю, имеем

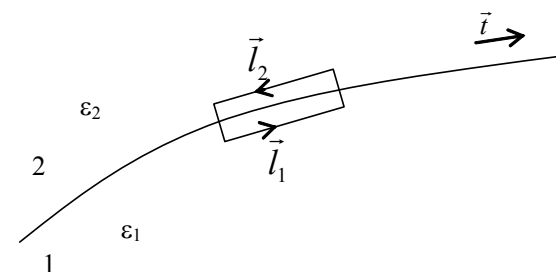


Рис. 7. Контур интегрирования на границе раздела сред

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = E_1 l_1 + E_2 l_2. \quad \text{Т. к. } l_1 = \vec{t} l, \text{ а } l_2 = -\vec{t} l, \text{ где } \vec{t} - \text{единичный вектор, касательный к поверхности раздела в месте контура, то из}$$

первого уравнения (21) следует $(E_1 \vec{t} - E_2 \vec{t}) l = 0$, или

$$E_{2t} = E_{1t}, \quad (24)$$

что означает непрерывность тангенциальных составляющих напряженности электрического поля. Аналогичным образом могут быть получены и граничные условия для \vec{B} и \vec{H} . Они имеют следующий вид:

$$H_{2t} = H_{1t}, B_{2n} = B_{1n}. \quad (25)$$

Уравнения Максвелла (15), (16) совместно с замыкающими соотношениями в форме (19) либо (20) и граничными условиями (23)-(25) составляют основу электродинамики покоящихся материальных сред.

6. Векторный и скалярный потенциалы. Уравнение Даламбера

Обсуждаются свойства векторного и скалярного потенциалов, выводится уравнение Даламбера

Нахождение переменного электромагнитного поля т.е. решений уравнений Максвелла, облегчается введением потенциалов. Также как и в случае стационарных полей, скалярный и векторный потенциалы являются неоднозначными. В качестве определения векторного потенциала можно сохранить уравнение из магнитостатики:

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}. \quad (26)$$

Подставляя это соотношение в первое из уравнений (15), имеем

$$\text{rot} \vec{E} = \text{rot} \left(\text{grad} \varphi - \dot{\vec{A}} \right). \text{ Меняя временные и пространственные производные в правой части и перенося все в левую часть, получим}$$

$$\text{rot} \vec{E} + \dot{\text{grad}} \varphi = 0. \text{ Это уравнение удовлетворяется, если } \vec{E} + \dot{\vec{A}} \text{ является потенциальной функцией: } \vec{E} + \dot{\vec{A}} = -\text{grad} j, \text{ где } j \text{ - пока произвольный скаляр. Отсюда следует, что}$$

$$\vec{E} = -\dot{\vec{A}} - \text{grad} j. \quad (27)$$

Таким образом \vec{B} и \vec{E} можно выразить через векторную и скалярную функции, которые называются векторным и скалярным потенциалами соответственно. Скалярный и векторный потенциалы электромагнитного поля являются лишь вспомогательными понятиями, а непосредственный физический смысл имеют только напряженности электрического и магнитного полей. Поэтому поля, описываемые разными значениями \vec{A} и j , но одинаковыми значениями \vec{E} и \vec{H} , явля-

ются тождественными. Покажем, что векторный и скалярный потенциалы неоднозначно определяются формулами (26), (27). Т.к.

$\text{rot}(\text{grad}) \epsilon 0$, то если мы прибавим к \vec{A} градиент произвольной скалярной функции c , то новому значению векторного потенциала $\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad} c$ будет соответствовать прежнее значение \vec{B} . Покажем, что \vec{E} останется неизменным, если одновременно с заменой \vec{A} на \vec{A}' заменить также j на j' по формуле: $j' = j - \dot{c}$. В соответствии с (27) новое значение напряженности электрического поля определяется выражением:

$$\vec{E}' = -\dot{\vec{A}'} - \text{grad} j' = -\dot{\vec{A}} - \dot{\text{grad}} c - \text{grad} j + \dot{\text{grad}} c = -\dot{\vec{A}} - \text{grad} j = \vec{E} \quad (28)$$

т.к. пространственное и временное дифференцирование независимы.

Инвариантность полей по отношению к рассмотренному типу преобразований называется калибровочной или градиентной инвариантностью. А дополнительное условие, которое устраняет неоднозначность потенциалов, называется калибровкой. Решение отдельных конкретных задач часто облегчается при использовании специальной, целесообразной для данной задачи калибровки. Один из вариантов калибровки будет использован ниже, для получения уравнений для потенциалов.

Из (26) и (20) следует, что $\vec{H} = \frac{1}{mm_0} \text{rot} \vec{A}$, а из (27) и (20) следует

$$\vec{D} = -ee_0 \dot{\vec{A}} + \text{grad} j. \text{ Подставляя эти соотношения в первое из}$$

уравнений (16) и используя операторное тождество $\text{rot} \text{rot} = \text{grad} \text{div} - \Delta$ приходим к

$$\frac{1}{mm_0} (\text{grad} \text{div} \vec{A} - \Delta \vec{A}) = \dot{j} - ee_0 \dot{\vec{A}} - ee_0 \text{grad} j. \quad (29)$$

Полученное равенство преобразуем, перегруппировав члены:

$$\frac{1}{mm_0} \text{grad} \text{div} \vec{A} + mm_0 ee_0 \dot{\vec{A}} = \dot{j} - ee_0 \text{grad} j$$

$$= \frac{1}{mm_0} DA - ee_0 \frac{\nabla^2 A}{t^2} + j. \quad (30)$$

Пользуясь неоднозначностью потенциалов, дополнительно потребуем, чтобы $div A + mm_0 ee_0 \frac{\nabla j}{t} = 0$ (калибровка Лоренца). Тогда из (30) имеем

$$DA - \frac{1}{v^2} \frac{\nabla^2 A}{t^2} = - mm_0 j, \quad (31)$$

где введено обозначение $v = c / \sqrt{\epsilon m}$, $c = 1 / \sqrt{\epsilon_0 m_0}$ – скорость света в вакууме.

Преобразуем левую часть второго из уравнений (16), используя первое из уравнений (20) и связь между напряженностью электрического поля и потенциалами (27):

$$div D = ee_0 div E = ee_0 div \left(\frac{\nabla A}{t} - ee_0 div grad j \right). \text{ Используя калибровку}$$

Лоренца, получим:

$$div D = e^2 e_0^2 mm_0 \frac{\nabla^2 j}{t^2} - ee_0 div grad j. \text{ Подставляя это выражение в (16)}$$

приходим к

$$Dj - \frac{1}{v^2} \frac{\nabla^2 j}{t^2} = - \frac{r}{ee_0}. \quad (32)$$

Уравнения (31) и (32) дают возможность определить векторный и скалярный потенциалы по заданному распределению токов и зарядов.

Зная A и j , можно найти E и H . При $\frac{\nabla}{t} = 0$ уравнения для A и j

переходят в уравнения электростатики и магнитостатики. Уравнения (31) и (32) однопипны и их можно записать в общем виде

$$Ds - \frac{1}{v^2} \frac{\nabla^2 s}{t^2} = - c(r, t), \quad (33)$$

где $c(r, t)$ – известная функция координат и времени. Уравнение (33)

называется уравнением Даламбера. При $c(r, t) = 0$ уравнение Далам-

бера принимает вид волнового уравнения

$$Ds - \frac{1}{v^2} \frac{\nabla^2 s}{t^2} = 0. \quad (34)$$

7. Распространение электромагнитных волн

Дается общее решение однородного уравнения Даламбера и обсуждается его физический смысл. Показано, что в одномерном случае общее решение представляет собой суперпозицию волновых возмущений, распространяющихся в прямом и обратном направлении

Из уравнений Максвелла следует важный вывод о существовании принципиально нового физического явления: электромагнитное поле способно существовать самостоятельно – без электрических зарядов и токов. При этом изменение его состояния обязательно имеет волновой характер. Поля такого рода называются электромагнитными волнами. В вакууме они всегда распространяются со скоростью, равной скорости света c . В отсутствие зарядов и токов потенциалы, а также все компоненты электромагнитного поля (в чем нетрудно убедиться) удовлетворяют однородному уравнению Даламбера или что, то же самое, волновому уравнению (34). Факт существования электромагнитных волн следует из того, что волновое уравнение имеет нетривиальные решения. Для простоты рассмотрим одномерный случай, когда поля зависят только от одной декартовой координаты и времени. В этом случае можно наглядно показать, что волновое уравнение имеет бесчисленное множество нетривиальных решений. В одномерном случае уравнение (34) приобретает вид:

$$\frac{\nabla^2}{x^2} s - \frac{1}{v^2} \frac{\nabla^2}{t^2} s = 0. \quad (35)$$

Общее решение уравнения (35) имеет вид:

$$s = f_1(x - vt) + f_2(x + vt). \quad (36)$$

Чтобы убедиться в этом, введем новые независимые переменные $x = x - vt$ и $z = x + vt$. В этих переменных уравнение (35) принимает вид:

$$\frac{\nabla^2}{x \nabla z} s = 0. \quad (37)$$

Его общее решение очевидно $s = f_1(x) + f_2(z)$, что и доказывает наше предположение. Причем член $f_1(x - vt)$ описывает возмущение, распространяющееся со скоростью v в положительном направлении вдоль оси x , а член $f_2(x + vt)$ описывает возмущение, распространяющееся со скоростью v в противоположном направлении.

Существование нетривиальных решений уравнений Максвелла в отсутствие токов и зарядов имеет фундаментальное значение. Это зна-

чит, что электромагнитное поле следует рассматривать как физическую реальность, особый вид материи, а не как атрибут зарядов.

Рассмотрим теперь решение волнового уравнения в сферически симметричном случае, т. е. считая, что s зависит лишь от расстояния от начала координат r и времени и не зависит от углов. В этом случае оператор Лапласа имеет вид:

$$\Delta s = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial s}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial s}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rs)}{\partial r^2}. \quad (38)$$

Вводя новую функцию $F(r, t) = rs(r, t)$ и переписывая (33) для функции $F(r, t)$ в сферических координатах, получаем, что $F(r, t)$ удовлетворяет одномерному волновому уравнению относительно пространственной переменной r :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0. \quad (39)$$

Общим решением этого уравнения, как и в рассмотренном выше случае, является сумма двух произвольных функций от аргументов $r - vt$ и $r + vt$ или, что то же самое от аргументов $t - r/v$ и $t + r/v$. Переходя опять к функции s , имеем следующее выражение:

$$s(r, t) = \frac{F_1(t - r/v)}{r} + \frac{F_2(t + r/v)}{r}, \quad (40)$$

где $F_{1,2}(x)$ - произвольные функции.

Первое слагаемое в (40) описывает волну, движущуюся в радиальном направлении от начала координат со скоростью v . Форма волны при этом не изменяется, а амплитуда уменьшается как $1/r$. Такая волна называется расходящейся. Второе слагаемое в (40) описывает сходящуюся к началу координат волну.

Из полученных решений видно, что электромагнитные возмущения распространяются в свободном пространстве со скоростью $v = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$. В вакууме, где относительные диэлектрическая и магнитная проницаемость равны единице скорость распространения полей равна скорости света $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$. Таким образом, электромагнитные волны и всякие изменения электрического и магнитного полей распространяются в вакууме со скоростью света.

8. Запаздывающий и опережающий потенциалы

Приводятся частные решения неоднородного уравнения Даламбера в виде запаздывающих и опережающих потенциалов и обсуждается их физический смысл

Как нетрудно убедиться прямой подстановкой, одно из частных решений неоднородного уравнения Даламбера (34) имеет вид:

$$s(\vec{r}, t) = \frac{1}{4p} \int_{V'} \frac{c(\vec{r}' \ddot{t} - R/v)}{R} dV'. \quad (41)$$

Здесь R - расстояние между точкой, в которой вычисляется потенциал (точкой наблюдения) и элементом dV' объема интегрирования (см. рис. 8) \vec{r}' - радиус-вектор элемента dV' .

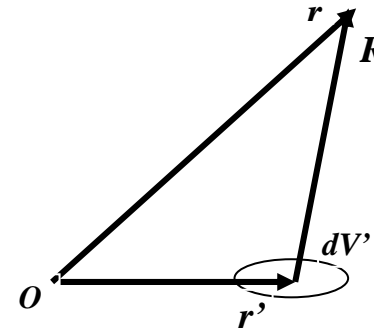


Рис. 8. Схема интегрирования в (41)

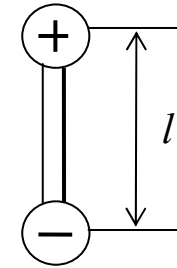


Рис. 9. Схема диполя

Используя общую структуру решения в виде (40) для уравнений (30) и (31), приведем выражения для скалярного и векторного потенциалов:

$$j(\vec{r}, t) = \frac{1}{4p\epsilon_0} \int_{V'} \frac{r(\vec{r}' \ddot{t} - R/v)}{R} dV'; \quad (42)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{mm_0}{4p} \int_{V'} \frac{j(\vec{r}' \ddot{t} - R/v)}{R} dV'. \quad (43)$$

Таким образом, потенциалы переменного поля определяются аналогичным образом, как и потенциалы стационарных полей с той лишь разницей, что в каждый момент времени t потенциал поля возбуждаемого на расстоянии R от элемента dV' определяется не зарядами и

токама в момент t , а зарядами и токами в предыдущий момент $t - R/v$. Т.е. можно сказать, что потенциалы dj и dA зарядов и токов каждого элемента dV распространяются по всем направлениям со скоростью v . Результирующие выражения для полных потенциалов в силу принципа суперпозиции получаются интегрированием по всем зарядам и токам. Выражения (42) и (43) носят название запаздывающих потенциалов электромагнитного поля, потому что они определяют потенциалы в более поздний момент времени t по сравнению с моментом времени $t - R/v$, в который берутся заряды и токи, которые создали эти потенциалы. В пределе $v \rightarrow \infty$ выражения (42) и (43) переходят соответственно в потенциалы для электростатического и магнитостатического полей. Т.е. в электростатике и магнитостатике предпологается мгновенное распространение взаимодействий.

Кроме решений в виде (42) и (43) формально возможны также решения вида:

$$j(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{r(\vec{r}', t + R/v)}{R} dV'; \quad (44)$$

$$A(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{j(\vec{r}', t + R/v)}{R} dV'. \quad (45)$$

В этом также легко убедиться прямой подстановкой.

Решения в виде (43) и (44) не имеют ясного физического смысла. Поскольку они формально соответствуют ситуации, в которой сначала создается потенциал, а потом появляются соответствующие ему заряды и токи, т.е. потенциалы (44) и (45) опережают заряды и токи. Поэтому они называются опережающими потенциалами.

Как запаздывающие, так и опережающие потенциалы являются различными частными решениями неоднородных уравнений (31) и (32). Неоднозначность решений может быть устранена только заданием определенных граничных условий.

9. Вибратор Герца

Рассматривается электромагнитное поле нейтральной системы движущихся зарядов на больших расстояниях от нее. Более детально рассмотрен частный пример простейшей такой системы - элементарный диполь с дипольным моментом, изменяющимся во времени или вибратор Герца

Вибратором Герца называется электрический диполь, дипольный момент которого изменяется со временем. Реальным прототипом вибратора Герца может служить совокупность двух металлических шариков

(см. Рис. 9), соединенных проводником. Если шарикам сообщить равные, но противоположные по знаку заряды и предоставить систему самой себе, то будет происходить колебательный процесс перезарядки шариков. Колебания тока будут затухающими. Если сопротивление проводников мало и потери на излучение за один период не велики, то в течение достаточно большого числа периодов затуханием можно пренебречь. Тогда на расстояниях много больших l , система может рассматриваться как диполь, дипольный момент которого изменяется со временем. Таким вибратором пользовался Герц, впервые экспериментально наблюдавший электромагнитные волны. Поэтому он называется вибратором Герца.

Рассмотрим нейтральную систему движущихся зарядов, расположенную в вакууме. Предположим, что заряды нашей системы находятся внутри некоторого объема V' и за пределы этого объема не выходят. Линейный размер объема V' (его можно определить, например, как расстояние между двумя крайними точками системы) обозначим l . Рассмотрим поле на большом расстоянии от системы, т.е. считаем выполненным условие $R \gg l$, где R - расстояние от элемента dV' нашей системы зарядов до точки наблюдения (см. рис. 8). Точку O (начало координат) целесообразно поместить в области распределения зарядов, причем ее местоположение в пределах области распределения зарядов не существенно. Скалярный потенциал рассматриваемой системы зарядов определяется формулой (42), в которой $R = r - r\dot{y}$, а $R \in \left| R \right| = \sqrt{r^2 - 2r\dot{y} + \dot{y}^2}$. На больших расстояниях от системы $\left| r \right| \in r \gg \left| \dot{y} \right| \in r\dot{y}$ и выражение для R можно разложить в ряд по степеням $r\dot{y}/r$:

$$R = r(1 - 2r\dot{y}/r^2 + r\dot{y}^2/r^2)^{1/2} = r - r\dot{y}/r + \dots \quad (46)$$

Пользуясь формулой (46), разложим подинтегральное выражение в (42) в ряд Тейлора по второму аргументу в точке r :

$$\frac{r(r\dot{y}t - R/c)}{R} = \frac{r(r\dot{y}t - r/c)}{r} - \frac{r\dot{y}}{r} \frac{r\dot{y}(r\dot{y}t - r/c)}{r} + \dots \quad (47)$$

Пренебрегая квадратичными членами по $r\dot{y}/r$, после подстановки (47) в (42) получаем:

$$j(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{r(\vec{r}'t - r/c)}{r} dV' - \frac{r}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{V'} \frac{r(\vec{r}'t - r/c)}{r} dV' \quad (48)$$

Ввиду независимости r от переменных интегрирования x, y, z и $1/r$ можно вынести за знак интегралов в (48). В результате имеем:

$$j(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{V'} r(\vec{r}'t - r/c) dV' - \frac{r}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{V'} r(\vec{r}'t - r/c) dV' \quad (49)$$

Первый интеграл в (48) равен нулю т. к. он равен полному заряду системы в момент времени $t - r/c$, который равен нулю т. к. по условию задачи наша система зарядов в целом нейтральная. Второй интеграл в (49) равен по определению дипольному моменту системы:

$$\int_{V'} r(\vec{r}'t - r/c) dV' = \vec{p}(t - r/c). \quad (50)$$

Таким образом, окончательно, скалярный потенциал в целом нейтральной системы движущихся зарядов равен

$$j(\vec{r}, t) = - \frac{r}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{1}{r} \vec{p}(t - r/c). \quad (51)$$

Нетрудно показать, что выражение (51) можно представить в виде дивергенции по переменной $\vec{r} = (x, y, z)$. Для этого распишем (51) более подробно:

$$j(\vec{r}, t) = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} p_x(t - r/c) + \frac{y}{r} \frac{\partial}{\partial y} p_y(t - r/c) + \frac{z}{r} \frac{\partial}{\partial z} p_z(t - r/c). \quad (52)$$

Далее воспользуемся тем, что $x/r = 1/r \cdot x$, $y/r = 1/r \cdot y$ и $z/r = 1/r \cdot z$, а также правилом дифференцирования сложных функций. В результате получим:

$$\frac{x}{r} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{r} = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{y}{r} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{r} = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{z}{r} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{z}{r} = \frac{\partial}{\partial z}. \quad (53)$$

Используя (53), выражение (52) можно упростить следующим образом:

$$j(\vec{r}, t) = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} p_x(t - r/c) + \frac{\partial}{\partial y} p_y(t - r/c) + \frac{\partial}{\partial z} p_z(t - r/c). \quad (54)$$

Выражение в скобках представляет собой дивергенцию вектора $\vec{p}(t - r/c)/r$ по переменной r :

$$j(\vec{r}, t) = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \text{div}_r \frac{\vec{p}(t - r/c)}{r}, \quad (55)$$

где индекс r у дивергенции свидетельствует о том, что дифференцирование осуществляется по радиусу вектору точки наблюдения \vec{r} .

Перейдем теперь к анализу выражения (43) для векторного потенциала. Разлагая подинтегральное выражение в (43) в ряд Тэйлора по аналогии с формулой (47),

$$\frac{j(\vec{r}'t - R/c)}{R} = \frac{j(\vec{r}'t - r/c)}{r} - \frac{r}{R} \frac{\partial}{\partial x} p_x(t - r/c) + \dots \quad (56)$$

мы можем ограничиться учетом лишь первого члена (в случае скалярного потенциала необходимо было сохранить также второй член, т. к. интеграл от первого члена обращался в нуль и не давал вклада в скалярный потенциал). Тогда с учетом (56) выражение для векторного потенциала приобретает вид:

$$A(\vec{r}, t) = \frac{m_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{j(\vec{r}'t - R/c)}{R} dV' = \frac{m_0}{4\pi r} \int_{V'} j(\vec{r}'t - r/c) dV'. \quad (57)$$

В случае замкнутых токов интеграл $\int_{V'} j dV'$, взятый по всему объему токов, тождественно равен нулю. Следовательно, в рассматриваемом приближении равны нулю и векторный потенциал, и магнитное поле

системы. В случае же незамкнутых токов этот интеграл отличен от нуля и, как будет показано ниже, равен производной по времени от дипольного момента системы $\overset{1}{p}$. Дифференцируя по времени соотношение (50) и используя уравнение непрерывности

$$\overset{\parallel}{\int}_t \overset{r}{r}(\overset{r}{r}\overset{1}{j}t - r/c) = - \text{div} \overset{r}{j}(\overset{r}{r}\overset{1}{j}t - r/c) \quad (58)$$

где $\text{div} \overset{r}{j}$ означает дифференцирование по радиусу-вектору $\overset{r}{r}$ получаем:

$$\overset{\parallel}{\int}_t \overset{r}{p}(t - r/c) = - \overset{r}{\int} \overset{r}{r} \overset{1}{j} \text{div} \overset{r}{j}(\overset{r}{r}\overset{1}{j}t - r/c) dV \overset{r}{j} \quad (59)$$

Умножим векторное уравнение (59) скалярно на произвольный постоянный вектор $\overset{1}{a}$. Полученное скалярное соотношение имеет вид:

$$\overset{1}{a} \overset{\parallel}{\int}_t \overset{r}{p}(t - r/c) = - \overset{r}{\int} (\overset{r}{a} \overset{r}{j} \text{div} \overset{r}{j}(\overset{r}{r}\overset{1}{j}t - r/c)) dV \overset{r}{j}. \quad (60)$$

Затем воспользуемся известной формулой векторного анализа:

$$\text{div}(f\overset{1}{g}) = f \text{div} \overset{1}{g} + \overset{1}{g} \text{grad} f, \quad (61)$$

где f - произвольный скаляр, а $\overset{1}{g}$ - произвольный вектор.

Если положить $(\overset{r}{a} \overset{r}{j}) = f$, а $\overset{1}{j} = \overset{r}{g}$ из (61) следует соотношение $(\overset{r}{a} \overset{r}{j}) \text{div} \overset{1}{j} = \text{div} \overset{r}{j}(\overset{r}{a} \overset{r}{j}) - \overset{1}{j} \text{grad} \overset{r}{a} \overset{r}{j}$. Легко проверить, что $\overset{1}{j} \text{grad} \overset{r}{a} \overset{r}{j} = \overset{r}{a} \overset{1}{j}$, и окончательно имеем $(\overset{r}{a} \overset{r}{j}) \text{div} \overset{1}{j} = \text{div} \overset{r}{j}(\overset{r}{a} \overset{r}{j}) - \overset{r}{a} \overset{1}{j}$. С помощью этого соотношения интеграл в правой части (60) можно преобразовать к виду:

$$\begin{aligned} & \overset{r}{\int} (\overset{r}{a} \overset{r}{j}) \text{div} \overset{1}{j}(\overset{r}{r}\overset{1}{j}t - r/c) dV \overset{r}{j} = \\ & = \overset{r}{\int} \text{div} \overset{r}{j}(\overset{r}{a} \overset{r}{j}) dV \overset{r}{j} - \overset{r}{a} \overset{r}{\int} \overset{1}{j}(\overset{r}{r}\overset{1}{j}t - r/c) dV \overset{r}{j}. \end{aligned} \quad (62)$$

Первый интеграл может быть преобразован с помощью теоремы Гаусса в интеграл по поверхности $S \overset{r}{j}$, охватывающей объем $V \overset{r}{j}$. Так как все заряды, по условию задачи, находятся внутри объема $V \overset{r}{j}$ и не выходят за этот объем, то через граничную поверхность ток не протекает. Поэтому на ней $j_n = 0$ и следовательно

$$\overset{r}{\int} \text{div} \overset{r}{j}(\overset{r}{a} \overset{r}{j}) dV \overset{r}{j} = \oint_{S \overset{r}{j}} (\overset{r}{a} \overset{r}{j}) j_n ds \overset{r}{j} = 0. \quad (63)$$

С помощью (62) и (63) уравнение (60) приводим к виду:

$$\overset{1}{a} \overset{\parallel}{\int}_t \overset{r}{p}(t - r/c) = \overset{r}{a} \overset{r}{\int} \overset{1}{j}(\overset{r}{r}\overset{1}{j}t - r/c) dV \overset{r}{j}. \quad (64)$$

Так как соотношение (63) справедливо при любом векторе $\overset{1}{a}$, то получаем:

$$\overset{\parallel}{\int}_t \overset{r}{p}(t - r/c) = \overset{r}{\int} \overset{r}{j}(\overset{r}{r}\overset{1}{j}t - r/c) dV \overset{r}{j}. \quad (65)$$

Подставляя (65) в (57) приходим к окончательному выражению для векторного потенциала

$$\overset{r}{A}(\overset{r}{r}, t) = \frac{m_0}{4pr} \overset{\parallel}{\int}_t \overset{r}{p}(t - r/c). \quad (66)$$

Итак, как скалярный, так и векторный потенциалы произвольной нейтральной системы движущихся зарядов на больших расстояниях от нее однозначно определяются вектором $\overset{1}{p}$ дипольного момента этой системы. С другой стороны поле вибратора Герца также определяется его дипольным моментом. Таким образом, поле нейтральной системы зарядов на больших расстояниях от нее совпадает с полем вибратора Герца, имеющего тот же дипольный момент. Благодаря этому, изучение полей вибратора Герца играет важную роль в теории электромагнетизма, т. к. многие сложные системы зарядов можно заменить эквивалентным осциллятором или, что то же самое, вибратором Герца.

Для дальнейшего изучения полей вибратора Герца удобно ввести в рассмотрение вектор Герца:

$$\overset{r}{P}(t, r) = \frac{\overset{r}{p}(t - r/c)}{r} = \overset{r}{p}_0 F(t, r), \quad (67)$$

где $\overset{r}{p}_0$ - постоянный вектор, характеризующий направление колебаний осциллятора.

Исходя из (55) и (66) получаем

$$\overset{r}{B} = \text{rot} \overset{r}{A} = \frac{m_0}{4p} \text{rot} \overset{\parallel}{\int}_t \overset{r}{P} = \frac{m_0}{4p} \overset{\parallel}{\int}_t \text{rot} \overset{r}{P}; \quad (68)$$

$$\begin{aligned} \overset{r}{E} &= - \text{grad} \overset{1}{A} - \overset{\parallel}{\int}_t \overset{1}{A} = \frac{1}{4pe_0} \text{grad} \text{div} \overset{r}{P} - \\ &- \frac{m_0}{4p} \overset{\parallel}{\int}_t \overset{1}{P} = \frac{1}{4pe_0} \text{rot} \text{rot} \overset{r}{P}, \end{aligned} \quad (69)$$

где принято во внимание, что $m_0 e_0 = 1/c^2$, использовано тождество векторного анализа $\text{rot} \text{rot} = \text{grad} \text{div} - \text{D}$, а также, что вектор $\overset{r}{P}$ удовлетворяет волновому уравнению (см. (40))

$$\text{D} \overset{r}{P} - \frac{1}{c^2} \overset{\parallel}{\int}_t \overset{1}{P} = 0. \quad (70)$$

Значение $\text{rot} \overset{r}{P}$ вычисляется следующим образом:

$$\text{rot}^{\vec{r}} P = \text{rot}(\vec{p}_0 F) = \text{grad} F \vec{r} \vec{p}_0 = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \vec{r} \vec{p}_0. \quad (71)$$

Дальнейшие вычисления удобно провести в сферической системе координат. Направим полярную ось Z вдоль вектора \vec{p}_0 , поместив начало координат в центре диполя, полярный и азимутальный углы обозначим q и a соответственно (см. рис. 10).

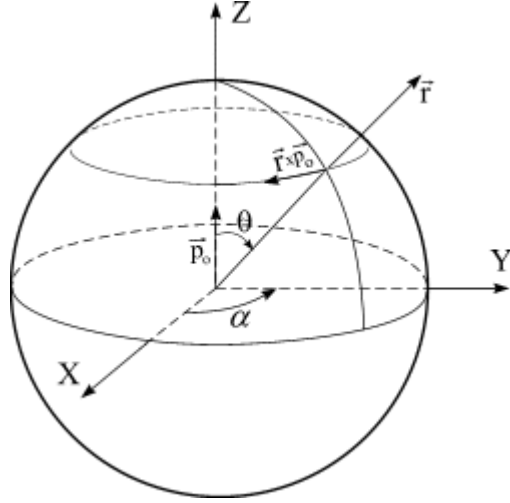


Рис. 10. Сферическая система координат

Очевидно, $(\vec{r} \vec{p}_0)_r = (\vec{r} \vec{p}_0)_q = 0$, $(\vec{r} \vec{p}_0)_a = -r p_0 \sin q$, поэтому $\text{rot}_r^{\vec{r}} P = \text{rot}_q^{\vec{r}} P = 0$, $\text{rot}_a^{\vec{r}} P = -\sin q \frac{\partial P}{\partial r}$. Отсюда на основании (67) получаем $B_r = B_q = 0$,

$$B_a = \frac{m_0}{4p} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot}_a^{\vec{r}} P = -\frac{m_0}{4p} \sin q \frac{\partial^2 P}{\partial t \partial r}. \quad (72)$$

Проекция вектора \vec{E} вычисляются с помощью формулы для ротора в сферической системе координат:

$$E_r = \frac{1}{4p e_0} \frac{1}{r \sin q} \frac{\partial}{\partial q} (\sin q \text{rot}_a^{\vec{r}} P) = -\frac{1}{2p e_0} \frac{\cos q}{r} \frac{\partial P}{\partial r} \quad (73)$$

$$E_q = \frac{1}{4p e_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \text{rot}_a^{\vec{r}} P) = \frac{1}{4p e_0} \frac{\sin q}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial P}{\partial t} \right) \quad (74)$$

Формулы (72)-(74) показывают, что вектор напряженности электрического поля лежит в меридиональных плоскостях, а вектор индукции магнитного поля перпендикулярен меридиональной плоскости, проведенной через соответствующую точку, причем магнитные силовые линии совпадают с параллелями рассматриваемой системы координат. Векторы электрического и магнитного полей в каждой точке взаимно перпендикулярны. Считая, что момент диполя изменяется во времени по гармоническому закону $\vec{p} = \vec{p}_0 e^{i\omega t}$, имеем $\vec{P} = \vec{p}_0 \frac{e^{i\omega(t-r/c)}}{r}$. Выполняя дифференцирование в формулах (72)-(74), найдем выражения для отличных от нуля компонент полей:

$$\begin{aligned} B_a &= \frac{m_0}{4p} i\omega \sin q \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{i\omega}{c} \frac{\partial P}{\partial t}, \\ E_r &= \frac{1}{2p e_0} \frac{\cos q}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{i\omega}{c} \frac{\partial P}{\partial t}, \\ E_q &= \frac{1}{4p e_0} \sin q \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^2} \right) + \frac{i\omega}{cr} - \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\partial P}{\partial t}. \end{aligned} \quad (75)$$

Легко видеть, что в непосредственной близости к осцилятору, на расстояниях меньших длины волны $l = 2\pi c / \omega$, поле близко к полю статического диполя и тока. На расстояниях много больших длины волны ($r \gg l$) поле осциллятора принципиально отличается от поля постоянного диполя и тока. Соответствующая область называется волновой зоной.

Рассматривая поля в волновой зоне членами порядка $1/r$ и $1/r^2$ можно пренебречь. Выражения для полей упрощаются:

$$\begin{aligned} B_a &= -\frac{m_0}{4p} \frac{\omega^2}{c} P \sin q = \frac{m_0}{4p} \frac{\omega^2}{c} \frac{\sin q}{r} p_0 e^{i\omega(t-r/c)}, \\ B_r &= B_q = 0; \\ E_q &= -\frac{1}{4p e_0} \frac{\omega^2}{c^2} P \sin q = -\frac{1}{4p e_0} \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\sin q}{r} p_0 e^{i\omega(t-r/c)}, \\ E_r &= E_a = 0. \end{aligned} \quad (76)$$

Эти формулы показывают, что в волновой зоне электрический и магнитный векторы перпендикулярны друг другу и радиусу вектору \vec{r} . Векторы \vec{E} , \vec{B} и \vec{r} составляют правовинтовую тройку векторов в каждой точке. Напряженность поля убывает обратно пропорционально первой степени расстояния. Представляемая формулами (76), (77) вол-

на называется сферической. Она распространяется в направлении радиус-вектора. Поверхности постоянной фазы этой волны являются сферами. Малые участки поверхности сферической волны могут рассматриваться как плоские электромагнитные волны.

10. Уравнение баланса энергии электромагнитного поля. Теорема Пойтинга

Определяется плотность энергии и плотность потока энергии электромагнитного поля, а также импульс и момент импульса электромагнитного поля

Электромагнитное поле, как и вещество, обладает определенной энергией, импульсом и моментом импульса. Рассмотрим вопрос об энергии поля – электрического и магнитного – с более общей точки зрения, исходя из баланса энергии в системе, состоящей из поля и заряженных частиц, движущихся в вакууме. Если в электромагнитном поле \vec{E} , \vec{B} движутся частицы, то их движение определяется уравнением

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}), \quad (78)$$

где q – заряд частицы, \vec{v} и \vec{p} – ее скорость и импульс. С другой стороны само поле создается зарядами. Это значит, что в уравнениях Максвелла (15), (16) плотности тока и заряда определяются выражениями

$$\vec{r} = \sum_a q_a n_a, \quad \vec{j} = \sum_a q_a n_a \vec{v}_a, \quad (79)$$

где n_a – плотность частиц с зарядом q_a и скоростью \vec{v}_a , суммирование распространяется на все сорта частиц a , находящихся в единичном объеме.

Вопрос состоит в следующем: как изменяется кинетическая энергия частиц $K = \sum_a \int_V \frac{1}{2} m_a n_a v_a^2 dV$, находящихся в некотором объеме V , под воздействием поля на частицы. Изменение кинетической энергии одной частицы в единицу времени составляет $\frac{d}{dt} \frac{1}{2} m v^2 = \vec{v} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt}$. Подставляя в это выражение $\frac{d\vec{p}}{dt}$ из (78) и учитывая, что $\vec{v} \wedge \vec{v} \wedge \vec{B} = 0$ и следовательно $(\vec{v} \wedge \vec{v} \wedge \vec{B}) = 0$, имеем $\frac{d}{dt} \frac{1}{2} m v^2 = q \vec{v} \wedge \vec{E}$. Суммируя это соотношение по всем частицам и интегрируя по объему занимаемому частицами, получим:

$$\frac{d}{dt} K = \sum_a \int_V q_a n_a \vec{v}_a \wedge \vec{E} dV. \quad (80)$$

Используя определение плотности тока (79) соотношение (80) можно переписать в виде $\frac{d}{dt} K = \int_V \vec{j} \wedge \vec{E} dV$. Выражая \vec{j} через поля из

уравнения (16) приходим к соотношению $\vec{j} \wedge \vec{E} = \frac{1}{m_0} \text{rot} \vec{B} \wedge \vec{E} - e_0 \frac{d}{dt} \vec{E} \wedge \vec{E}$.

Домножая первое из уравнений (15) на \vec{B} , получаем $\vec{B} \wedge \frac{d\vec{B}}{dt} = -\vec{B} \wedge \text{rot} \vec{E}$. Умножая это равенство на m_0^{-1} и складывая его с предыдущим, приходим к:

$$\vec{j} \wedge \vec{E} = -e_0 \frac{d}{dt} \vec{E} \wedge \vec{E} - \frac{1}{m_0} \vec{B} \wedge \frac{d\vec{B}}{dt} - \frac{1}{m_0} (\vec{B} \wedge \text{rot} \vec{E} - \text{rot} \vec{B} \wedge \vec{E}).$$

Проинтегрируем это уравнение по объему, воспользовавшись тем, что $\vec{B} \wedge \text{rot} \vec{E} - \text{rot} \vec{B} \wedge \vec{E} = \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B})$, а также теоремой Гаусса $\int_V \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) dV = \oint_S \vec{E} \wedge \vec{B} ds$, где S – поверхность, ограничивающая объем, и ds – ориентированный элемент поверхности, направленный вдоль внешней нормали к ней. В результате получим:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} K \in \int_V \vec{j} \wedge \vec{E} dV = \\ = - \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} (\vec{E} \wedge \vec{D} + \vec{B} \wedge \vec{H}) dV - \oint_S \vec{E} \wedge \vec{H} ds, \end{aligned} \quad (81)$$

где использованы соотношения $\vec{D} = e_0 \vec{E}$, $\vec{H} = \vec{B} / m_0$ справедливые для вакуума.

Проанализируем это выражение. Сначала предположим, что на границе объема V поля обращаются в нуль. Тогда $\frac{d}{dt} K = - \frac{d}{dt} W$, где $W \in \frac{1}{2} \int_V (\vec{E} \wedge \vec{D} + \vec{B} \wedge \vec{H}) dV$. В этом случае $dK = -dW$, т. е. приращение K равно убыли W , так что сумма K и W с течением времени не изменяется: $K + W = const$. Это соотношение определяет баланс энергии, а поэтому выражает закон сохранения энергии в данном слу-

чае. Так как мы рассматриваем только частицы и электромагнитное поле, которые взаимодействуют между собой и образуют замкнутую систему, то $K + W$ есть полная энергия системы, а величина W , зависящая только от E, D, B, H есть не что иное, как энергия электромагнитного поля. Она представляет собой интеграл от плотности электромагнитной энергии w по объему, занимаемому полем

$$W = \int_V w dV, \quad w = \frac{1}{2} (\vec{E} \vec{D} + \vec{B} \vec{H}). \quad (82)$$

Плотность энергии равна сумме плотностей электрической $w_e = e_0 E^2 / 2$ и магнитной $w_h = m_0^{-1} B^2 / 2$ энергий. Обратимся снова к общему выражению для $(d/dt)K$. С учетом поверхностного интеграла $J = \oint_S \vec{S} d\vec{s}$, где $\vec{S} = \vec{E} \vec{r} \vec{H}$, баланс энергии рассматриваемой нами

динамической системы – заряженные частицы плюс электромагнитное поле – выглядит следующим образом:

$$\frac{d}{dt} (K + W) = -J. \quad (83)$$

Слева здесь стоит производная по времени от полной энергии системы, т. е. суммы кинетической энергии заряженных частиц и энергии электромагнитного поля. Эта производная не равна нулю. Это означает, что энергия покидает или, наоборот, входит в объем V . Движение энергии происходит через поверхность S , ограничивающую объем V . Поэтому следует интерпретировать величину J как поток энергии, уходящей из объема V . Соответственно величину \vec{S} нужно интерпретировать как плотность потока электромагнитной энергии, т. е. как энергию, проходящую за единицу времени через единичную площадку, ориентированную перпендикулярно вектору \vec{S} . Этот вектор носит название вектора Пойтинга, а уравнение (83) выражает содержание теоремы Пойтинга.

Кроме энергии электромагнитное поле обладает еще импульсом (количеством движения). Плотность импульса $\vec{g} = \vec{S} / c^2$ отличается от вектора Пойтинга только множителем $1/c^2$. Импульс электромагнитного поля, находящегося в объеме V есть

$$\vec{G} = \int_V \vec{g} dV = c^{-2} \int_V \vec{E} \vec{r} \vec{H} dV. \quad (84)$$

Полный импульс системы, состоящей из частиц и электромагнитного поля, определяется формулой:

$$\vec{P} = \int_V \vec{p} + \frac{1}{c^2} \int_V \vec{E} \vec{r} \vec{H} dV, \quad (85)$$

где первое слагаемое представляет собой импульс частиц в объеме V . Полный импульс в конечном объеме не сохраняется т. к. электромагнитное поле проходит через границу объема и переносит с собой часть импульса.

Наконец, поле обладает еще и определенным моментом импульса (моментом количества движения). По аналогии с механикой плотность момента импульса поля равна $\vec{r} \vec{r} \vec{g} = c^{-2} \vec{r} \vec{r} (\vec{E} \vec{r} \vec{H})$. Момент электромагнитного поля \vec{L} в объеме V выражается формулой

$$\vec{L} = \frac{1}{c^2} \int_V (\vec{r} \vec{r} (\vec{E} \vec{r} \vec{H})) dV. \quad (86)$$

11. Максвеллов тензор натяжений. Пондеромоторная сила для электромагнитного поля. Сила Абрахама

Определяется пондеромоторная сила для электромагнитного поля из тензора натяжений Максвелла

Тензор натяжений электромагнитного поля $\overset{\llcorner}{T}$ может быть разложен на сумму «максвеллова» тензора $\overset{\llcorner}{T} \overset{\lrcorner}{\ddot{y}}$ и тензора стрикционных натяжений $\overset{\llcorner}{T} \overset{\lrcorner}{\ddot{y}}$. В дальнейшем для простоты стрикционные натяжения рассматриваться не будут. Они приводят лишь к перераспределению пондеромоторных сил по объему находящихся в поле тел, но не изменяют результирующей этих сил. Поэтому полный тензор натяжений $\overset{\llcorner}{T}$ будет тождественен максвеллову $\overset{\llcorner}{T} \overset{\lrcorner}{\ddot{y}}$. В этих условиях тензор натяжений $\overset{\llcorner}{T}$ выражается суммой тензоров натяжений в случае электростатического и магнитостатического полей:

$$T_{ik} = \frac{1}{2} (E_i D_k + E_k D_i + H_i B_k + H_k B_i - d_{ik} (\vec{E} \vec{D} + \vec{H} \vec{B})). \quad (87)$$

Индексы i и k в этом выражении пробегает значения 1,2,3 и означают проекции полей на пространственные координаты, которые будем обозначать x_1, x_2, x_3 , величина d_{ik} – символ Кронекера, который определяется следующим образом $d_{ii} = 1$, при $i \neq k$.

Плотность пондеромоторных сил связана с тензором натяжений следующим образом:

$$f_i = e^3 \frac{\mathbb{I} T_{ik}}{\mathbb{I} x_k}.$$

Компоненты тензора T_{ik} удобно представить в виде

$$T_{ik} = E_i D_k + H_i B_k - \frac{1}{2} d_{ik}^{\Gamma \Gamma} (E D + H B),$$

который тождественен (87). В результате дифференцирования имеем:

$$e^3 \frac{\mathbb{I} T_{ik}}{\mathbb{I} x_k} = e^3 \frac{\mathbb{I} E_i}{\mathbb{I} x_k} \frac{\mathbb{I} D_k}{\mathbb{I} x_k} + \frac{\mathbb{I} E_i}{\mathbb{I} x_k} D_k + H_i \frac{\mathbb{I} B_k}{\mathbb{I} x_k} + \frac{\mathbb{I} H_i}{\mathbb{I} x_k} B_k - \frac{1}{2} \frac{\mathbb{I}}{\mathbb{I} x_i} (E D + H B). \quad (88)$$

Принимая во внимание, что согласно максвелловым уравнениям (15), (16):

$$e^3 \frac{\mathbb{I} D_k}{\mathbb{I} x_k} = \text{div}^{\Gamma} D = r, \quad e^3 \frac{\mathbb{I} B_k}{\mathbb{I} x_k} = \text{div}^{\Gamma} B = 0. \quad (89)$$

Далее $\frac{\mathbb{I}}{\mathbb{I} x_i} (E D) = e^3 \frac{\mathbb{I}}{\mathbb{I} x_i} (E_k D_k) = e^3 \frac{\mathbb{I} E_k}{\mathbb{I} x_i} D_k + E_k \frac{\mathbb{I} D_k}{\mathbb{I} x_i}$ и часть членов в правой части (86) можно преобразовать следующим образом:

$$e^3 \frac{\mathbb{I} E_i}{\mathbb{I} x_k} D_k - \frac{1}{2} \frac{\mathbb{I}}{\mathbb{I} x_i} (E D) = e^3 \frac{\mathbb{I} E_i}{\mathbb{I} x_k} D_k - \frac{\mathbb{I} E_k}{\mathbb{I} x_i} D_k + \frac{1}{2} e^3 \frac{\mathbb{I} E_k}{\mathbb{I} x_i} D_k - E_k \frac{\mathbb{I} D_k}{\mathbb{I} x_i}. \quad (90)$$

Аналогичным образом преобразуются и члены $e^3 \frac{\mathbb{I} H_i}{\mathbb{I} x_k} B_k - \frac{1}{2} \frac{\mathbb{I}}{\mathbb{I} x_i} (H B)$:

$$e^3 \frac{\mathbb{I} H_i}{\mathbb{I} x_k} B_k - \frac{1}{2} \frac{\mathbb{I}}{\mathbb{I} x_i} (H B) = e^3 \frac{\mathbb{I} H_i}{\mathbb{I} x_k} B_k - \frac{\mathbb{I} H_k}{\mathbb{I} x_i} B_k + \frac{1}{2} e^3 \frac{\mathbb{I} H_k}{\mathbb{I} x_i} B_k - H_k \frac{\mathbb{I} B_k}{\mathbb{I} x_i}. \quad (91)$$

В рассматриваемом случае неподвижной изотропной среды связь между E и D , а также между H и B дается формулами (20), поэтому вторые слагаемые в правых частях уравнений (90) и (91) упрощаются следующим образом:

$$e^3 \frac{\mathbb{I} E_k}{\mathbb{I} x_i} D_k - E_k \frac{\mathbb{I} D_k}{\mathbb{I} x_i} = - e^3 E_k^2 \frac{\mathbb{I}}{\mathbb{I} x_i} (e e_0) = - E^2 \frac{\mathbb{I}}{\mathbb{I} x_i} (e e_0); \quad (92)$$

$$e^3 \frac{\mathbb{I} H_k}{\mathbb{I} x_i} B_k - H_k \frac{\mathbb{I} B_k}{\mathbb{I} x_i} = e^3 H_k^2 \frac{\mathbb{I}}{\mathbb{I} x_i} (m m_0) = - H^2 \frac{\mathbb{I}}{\mathbb{I} x_i} (m m_0). \quad (93)$$

Преобразуя правую часть (88) с помощью соотношений (89)-(93), приходим к следующему выражению для $e^3 \frac{\mathbb{I} T_{ik}}{\mathbb{I} x_k}$:

$$e^3 \frac{\mathbb{I} T_{ik}}{\mathbb{I} x_k} = r E_i + e^3 \frac{\mathbb{I} E_i}{\mathbb{I} x_k} D_k - \frac{\mathbb{I} E_k}{\mathbb{I} x_i} D_k + e^3 \frac{\mathbb{I} H_i}{\mathbb{I} x_k} B_k - \frac{\mathbb{I} H_k}{\mathbb{I} x_i} B_k - \frac{1}{2} E^2 \frac{\mathbb{I}}{\mathbb{I} x_i} (e e_0) + H^2 \frac{\mathbb{I}}{\mathbb{I} x_i} (m m_0)$$

Нетрудно проверить прямыми вычислениями, что

$$e^3 \frac{\mathbb{I} E_i}{\mathbb{I} x_k} D_k - \frac{\mathbb{I} E_k}{\mathbb{I} x_i} D_k = (\text{rot}^{\Gamma} E^{\Gamma} D)_i, \quad e^3 \frac{\mathbb{I} H_i}{\mathbb{I} x_k} B_k - \frac{\mathbb{I} H_k}{\mathbb{I} x_i} B_k = (\text{rot}^{\Gamma} H^{\Gamma} B)_i.$$

На основании уравнений Максвелла (15), (16)

$$(\text{rot}^{\Gamma} E^{\Gamma} D) + (\text{rot}^{\Gamma} H^{\Gamma} B) = - \frac{\mathbb{I} B}{\mathbb{I} t} \Gamma D + \frac{\mathbb{I} D}{\mathbb{I} t} \Gamma B + j \Gamma B,$$

$$\text{далее} - \frac{\mathbb{I} B}{\mathbb{I} t} \Gamma D + \frac{\mathbb{I} D}{\mathbb{I} t} \Gamma B = D \Gamma \frac{\mathbb{I} B}{\mathbb{I} t} + \frac{\mathbb{I} D}{\mathbb{I} t} \Gamma B = \frac{\mathbb{I}}{\mathbb{I} t} (D \Gamma B).$$

С помощью четырех последних соотношений выражение для $e^3 \frac{\mathbb{I} T_{ik}}{\mathbb{I} x_k}$ преобразуется к виду:

$$e^3 \frac{\mathbb{I} T_{ik}}{\mathbb{I} x_k} = r E_i + (j \Gamma B)_i - \frac{1}{2} E^2 \frac{\mathbb{I}}{\mathbb{I} x_i} (e e_0) + H^2 \frac{\mathbb{I}}{\mathbb{I} x_i} (m m_0) + \frac{\mathbb{I}}{\mathbb{I} t} (D \Gamma B)_i. \quad (94)$$

12. Задачи с решениями

В рассматриваемом нами случае неподвижной изотропной среды последний член в уравнении (94) может быть представлен в следующей форме:

$$\frac{\partial}{\partial t} (D \nabla \cdot B)_i = \frac{\partial g_i}{\partial t} + (ee_0mm_0 - e_0m_0) \frac{\partial}{\partial t} (E \nabla \cdot H)_i, \quad (95)$$

где вектор $\vec{g} = e_0m_0 (\vec{E} \nabla \cdot \vec{H}) = \frac{1}{c^2} (\vec{E} \nabla \cdot \vec{H})$ – импульс или количество движения электромагнитного поля (см. также (84), (85)). Последний член в правой части (95) называется силой Абрахама. Если ввести еще обозначения

$$f_i^{(1)} = rE_i + (j \nabla \cdot B)_i;$$

$$f_i^{(2)} = -\frac{1}{2} \frac{\partial E^2}{\partial x_i} + H^2 \frac{\partial}{\partial x_i} (mm_0) + (ee_0mm_0 - e_0m_0) \frac{\partial}{\partial t} (E \nabla \cdot H)_i,$$

то уравнение (94) примет вид

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = f_i^{(1)} + f_i^{(2)} + \frac{\partial g_i}{\partial t}. \quad (96)$$

Первый член в правой части (96) $f_i^{(1)}$ равен плотности пондеромоторных сил действующих на свободные заряды r и электрические токи \vec{j} . Второй член в правой части (96) $f_i^{(2)}$ представляет собой плотность пондеромоторных сил действующих на среду. В вакууме $e = m = 1$ и поэтому $f_i^{(2)} = 0$. Последний член в правой части (96) учитывает изменение во времени плотности электромагнитного количества движения \vec{g} . Этот член обеспечивает сохранение суммы количества движения материальных тел и электромагнитного поля. В постоянном поле он равен нулю.

1. Круглая проволочная петля радиуса a , находящаяся в постоянном магнитном поле H_0 , вращается с угловой скоростью ω вокруг своего диаметра, перпендикулярного H_0 (см. рис. 11). Найти силу тока в петле и среднюю мощность \bar{P} , которая требуется для поддержания движения.

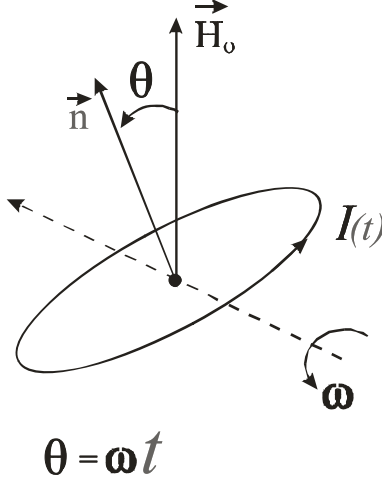


Рис. 11. Проволочная петля, вращающаяся в магнитном поле

Решение

При вращении петли в постоянном магнитном поле поток вектора магнитной индукции через площадь петли изменяется, что вызывает э.д.с. $e_{ind}(t)$ в контуре петли, которая зависит от времени. Поэтому ток в рамке также рис. 11 будет функцией времени, следовательно магнитный поток, созданный этим током, через площадь петли будет переменным, что будет вызывать в петле э.д.с. самоиндукции $e_s(t)$. По закону Ома для полной цепи сумма падений напряжений вдоль замкнутого контура равна сумме приложенных э.д.с. :

$$I(t)R = e_{ind}(t) + e_s(t), \quad (1.1)$$

где R - сопротивление петли.

В соответствии с (1) $e_{ind}(t) = - \frac{dF(t)}{dt}$, где $F(t) = B_0 S \cos \omega t$ - поток вектора магнитной индукции, созданный внешним магнитным полем H_0 , через плоскость петли, $S = pa^2$ - площадь, охватываемая контуром петли. Предполагаем, что в начальный момент нормаль к плоскости петли параллельна вектору магнитного поля H_0 .

Далее, в соответствии с определением э.д.с. самоиндукции: $e_s(t) = -L \frac{dI(t)}{dt}$, где L - индуктивность петли. Подставляя два последних соотношения в (1.1) получим неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка относительно $I(t)$:

$$\frac{dI(t)}{dt} + \frac{R}{L} I(t) = \frac{m_0 H_0 \omega S}{L} \sin \omega t. \quad (1.2)$$

Здесь было использовано соотношение $B_0 = m_0 H_0$ справедливое для вакуума (считаем, что петля находится в вакууме). Уравнение (1.2) легко решается в явном виде. Наиболее просто это можно сделать комплексным методом, полагая $\sin \omega t = \text{Im}(e^{i\omega t})$, $I(t) = \text{Im}(I_0 e^{i\omega t})$, где I_0 - неизвестная комплексная константа, подлежащая определению.

Подставляя в таком виде $I(t)$ в (1.2), имеем:

$$\text{Im}(i\omega I_0 e^{i\omega t}) + \frac{R}{L} \text{Im}(I_0 e^{i\omega t}) = \frac{m_0 H_0 \omega S}{L} \text{Im}(e^{i\omega t}). \quad (1.3)$$

При получении (1.3) мы воспользовались тем, что операции Im и дифференцирование можно переставлять. Далее, внося под знак Im постоянные вещественные множители, приходим к соотношению:

$$\text{Im} \left(i\omega I_0 + \frac{R}{L} I_0 \right) e^{i\omega t} = \frac{m_0 H_0 \omega S}{L} e^{i\omega t}. \quad (1.4)$$

Ввиду линейности уравнения (1.4) знак Im вообще можно отбросить, после чего находим I_0 :

$$I_0 = \frac{m_0 H_0 \omega S}{i\omega L + R}. \quad (1.5)$$

Зависимость тока от времени определяется формулой:

$$I(t) = \text{Im} \left(\frac{m_0 H_0 \omega S}{i\omega L + R} e^{i\omega t} \right) = \frac{pa^2 m_0 H_0 \omega}{\sqrt{(\omega L)^2 + R^2}} \sin(\omega t - j),$$

где j определяется из условия $\text{tg} j = \frac{\omega L}{R}$.

Средняя мощность, которая требуется для поддержания движения равна:

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T I^2(t) R dt = \frac{1}{2} \frac{(pa^2 m_0 H_0 \omega)^2}{(\omega L)^2 + R^2} R, \quad (1.6)$$

где $T = 2\pi / \omega$ - период вращения петли.

2. Определить собственные частоты электрических колебаний в двух контурах (см. рис. 12), связь между которыми осуществляется через емкость C

Решение

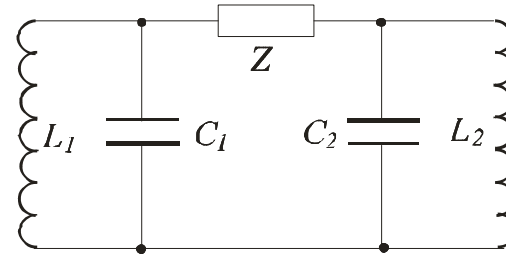


Рис. 12. Два колебательных контура, связанных через емкость

Резонансные частоты контура, изображенного на рис. 12 находятся из условия $Z = 0$, где Z - комплексное сопротивление контура или импеданс контура. Его можно найти, зная комплексные сопротивления индуктивности и емкости, и используя законы последовательного и параллельного соединения сопротивлений. Сопротивление индуктивного элемента R_L определяется формулой $R_L = i\omega L$, где L - индуктивность этого элемента. Сопротивление емкостного элемента цепи определяется формулой $R_C = 1 / i\omega C$, где C - емкость этого элемента.

Таким образом, удобно считать, что контур изображенный на рис. 12., состоит из трех последовательно соединенных сопротивлений R_1, Z и R_2 , где R_1 - сопротивление блока $L_1 - C_1$, R_2 - сопротивление блока $L_2 - C_2$. Так как элементы L_1 и C_1 соединены параллельно, то общее сопротивление этого блока вычисляется из формулы $1 / R_1 = 1 / R_{L1} + 1 / R_{C1}$, где $R_{L1} = i\omega L_1$ - сопротивление элемента L_1 , $R_{C1} = 1 / i\omega C_1$ - сопротивление элемента. Отсюда следует, что

$$R_1 = R_{L_1}R_{C_1} / (R_{L_1} + R_{C_1}) = i\omega L_1 / (1 - \omega^2 L_1 C_1). \quad (2.1)$$

Аналогично можно получить выражение для комплексного сопротивления второго блока R_2 :

$$R_2 = R_{L_2}R_{C_2} / (R_{L_2} + R_{C_2}) = i\omega L_2 / (1 - \omega^2 L_2 C_2). \quad (2.2)$$

Теперь выражение для полного комплексного сопротивления контура можно найти по формуле: $Z_t = R_1 + Z + R_2$. Подставляя в это выражение R_1 из (2.1) и R_2 из (2.2), а также учитывая, что $Z = 1/i\omega C$, получим:

$$\begin{aligned} Z_t &= i\omega L_1 / (1 - \omega^2 L_1 C_1) + i\omega L_2 / (1 - \omega^2 L_2 C_2) + 1/i\omega C = \\ &= \frac{(1 - \omega^2 L_1 C_1)(1 - \omega^2 L_2 C_2)}{i\omega C (1 - \omega^2 L_1 C_1)(1 - \omega^2 L_2 C_2)} - \\ &- \frac{\omega^2 L_1 C (1 - \omega^2 L_2 C_2) + \omega^2 L_2 C (1 - \omega^2 L_1 C_1)}{i\omega C (1 - \omega^2 L_1 C_1)(1 - \omega^2 L_2 C_2)}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Собственные частоты определяются из соотношения $Z_t = 0$, т. е.

$$\begin{aligned} (1 - \omega^2 L_1 C_1)(1 - \omega^2 L_2 C_2) - \omega^2 L_1 C (1 - \omega^2 L_2 C_2) - \\ - \omega^2 L_2 C (1 - \omega^2 L_1 C_1) = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Уравнение (2.4) является биквадратным и может быть решено аналитически. Для этого его удобно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \omega^4 L_1 L_2 (C_1 C_2 + C C_1 + C C_2) - \\ - \omega^2 (L_1 C_1 + L_2 C_2 + L_1 C + L_2 C) + 1 = 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

Его решения имеют вид:

$$\begin{aligned} \omega_{1,2}^2 &= \frac{L_1 C_1 + L_2 C_2 + C(L_1 + L_2)}{2L_1 L_2 (C_1 C_2 + C C_1 + C C_2)} \pm \\ &\pm \frac{((L_1 (C + C_1) - L_2 (C + C_2))^2 + 4L_1 L_2 C^2)^{1/2}}{2L_1 L_2 (C_1 C_2 + C C_1 + C C_2)}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

При $C = 0$ связь между контурами отсутствует и $\omega_1 = 1/\sqrt{L_1 C_1}$, $\omega_2 = 1/\sqrt{L_2 C_2}$, что соответствует независимым колебаниям в каждом из контуров.

3. Колебательный контур состоит из емкости C и индуктивности L . В некоторый момент времени к обкладкам конденсатора при-

соединяется батарея с постоянной э.д.с. \mathcal{E} и внутренним сопротивлением R (см. рис. 13). Найти зависимость тока, текущего через индуктивность от времени. Исследовать эту зависимость от величин R , L и C .

Решение

При подключении источника э.д.с. к рассматриваемому контуру в нем возникает переменный ток. При этом в емкостном элементе цепи происходят явления зарядки и разрядки конденсатора, а в индуктивном элементе становится существенным явление самоиндукции, т. е. возникает дополнительная э.д.с., э.д.с. самоиндукции e_s .

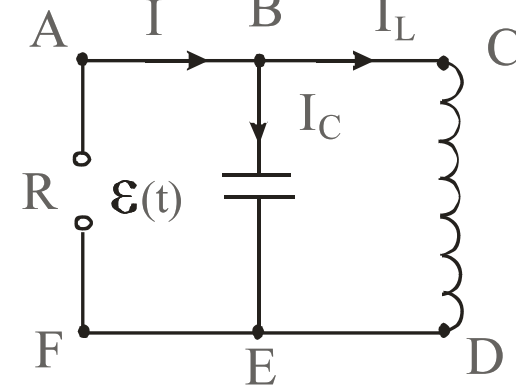


Рис. 13. Колебательный контур, соединенный с источником э.д.с.

Поскольку токи в цепи квазистационарные (см. с. 6), для них справедливы те же законы, что и для постоянного тока. В частности, здесь удобно использовать второе правило Кирхгофа: для любого замкнутого контура алгебраическая сумма э.д.с. равна алгебраической сумме падений напряжений на элементах контура. Для написания соотношений удобно выбрать два контура: 1 контур – ABEF, 2 контур – ACDF. Причем порядок букв соответствует направлению обхода контуров. Направление токов на участках контура можно также выбрать произвольно. Допустим, что в некоторый произвольный момент времени $t > 0$, направление токов соответствует показанному на рис. 13. В обозначениях указанных на рис. 13 соотношения, выражающие второе правило Кирхгофа для контуров 1 и 2, выглядят следующим образом:

$$1 \text{ контур: } \mathcal{E}(t) = I(t)R + u_C(t); \quad (3.1)$$

$$2 \text{ контур: } e(t) + e_s(t) = I(t)R, \quad (3.2)$$

где $u_c(t)$ - напряжение (или разность потенциалов) на обкладках конденсатора.

Согласно закону самоиндукции $e_s(t) = -L \frac{dI_L(t)}{dt}$, где $I_L(t)$ – ток, протекающий через индуктивность, а для конденсатора справедливо соотношение $u_c(t) = \frac{q(t)}{C}$, где $q(t)$ - заряд на обкладках конденсатора.

Подставляя эти соотношения в (3.1) и (3.2), а также вычитая (3.2) из (3.1) получим:

$$\frac{q(t)}{C} = L \frac{dI_L(t)}{dt}. \quad (3.3)$$

Далее используя первое правило Кирхгофа для узла В (закон сохранения заряда): $I(t) = I_C(t) + I_L(t)$, где $I_C(t)$ – ток протекающий через конденсатор, выражение (3.2) можно переписать в виде:

$$e(t) = (I_C(t) + I_L(t))R + L \frac{dI_L(t)}{dt}. \quad (3.4)$$

Дифференцируя (3.3) по времени с учетом, что $I_C(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ получим:

$$\frac{I_C(t)}{C} = L \frac{d^2I_L(t)}{dt^2}. \quad (3.5)$$

Таким образом, имеем систему из двух уравнений (3.4) и (3.5) с двумя неизвестными $I_C(t)$ и $I_L(t)$. Исключая из них $I_C(t)$ приходим к уравнению для $I_L(t)$:

$$\frac{d^2I_L(t)}{dt^2} + \frac{1}{CR} \frac{dI_L(t)}{dt} + \frac{1}{CL} I_L(t) = \frac{e(t)}{CLR}, \quad (3.6)$$

где $e(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e, & t > 0 \end{cases}$ - по условию задачи известная функция времени.

Уравнение (3.6) является неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка в полных производных. Оно может быть решено методом вариации постоянных Лагранжа. Ниже кратко опишем этот метод для данного случая. Вначале ищем общее решение соответствующего (3.6) однородного уравнения:

$$\frac{d^2I_L(t)}{dt^2} + \frac{1}{CR} \frac{dI_L(t)}{dt} + \frac{1}{CL} I_L(t) = 0. \quad (3.7)$$

Оно имеет вид:

$$I_L(t) = A e^{l_1 t} + B e^{l_2 t}, \quad (3.8)$$

где A и B константы, а $l_{1,2}$ - корни соответствующего характеристического уравнения, которое получается из (3.7) при подстановке в него решения в виде $I_L(t) = \text{const} \cdot e^{l t}$:

$$l^2 + \frac{1}{CR} l + \frac{1}{CL} = 0. \quad (3.9)$$

Решая (3.9) получаем

$$l_{1,2} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\frac{1}{4R^2C^2} - \frac{1}{CL}}. \quad (3.10)$$

Из (3.10) легко видеть, что зависимость $I_L(t)$ будет иметь качественно разный характер в случаях, когда подкоренное выражение в (3.10) положительное, отрицательное или равно нулю. Для получения окончательного решения нужно в (3.8) считать A и B зависящими от времени. Тогда

$$\frac{dI_L(t)}{dt} = l_1 A(t) e^{l_1 t} + l_2 B(t) e^{l_2 t} + A'(t) e^{l_1 t} + B'(t) e^{l_2 t}. \quad (3.11)$$

Так как мы ввели две неизвестных функции, мы можем произвольно определить соотношение между ними, которое удобно выбрать следующим образом:

$$A'(t) e^{l_1 t} + B'(t) e^{l_2 t} = 0. \quad (3.12)$$

Подставляя в (3.6) $I_L(t)$ в виде (3.8) (считая A и B зависящими от времени), и используя (3.12) получим:

$$l_1 A(t) e^{l_1 t} + l_2 B(t) e^{l_2 t} = e(t). \quad (3.13)$$

Система двух линейных алгебраических уравнений (3.12), (3.13) относительно неизвестных функций $A'(t)$ и $B'(t)$ легко решается, после чего интегрированием можно определить $A(t)$ и $B(t)$, а затем и $I_L(t)$.

Опуская эти детали, приведем окончательные выражения для $I_L(t)$:

$$a) \left(\frac{1}{2RC} \right)^2 < \frac{1}{CL};$$

$$I_L(t) = \frac{e}{R} \left[1 - e^{-t/2RC} \left(\frac{\sin wt}{2wRC} + \cos wt \right) \right],$$

$$\text{где } w = \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{1}{4R^2C^2}};$$

$$б) \frac{1}{2RC} > \frac{1}{CL};$$

$$I_L(t) = \frac{e}{R} - e^{-t/2RC} \frac{1}{2RC} + chW,$$

$$\text{где } W = \sqrt{\frac{1}{2RC} - \frac{1}{CL}};$$

$$в) \frac{1}{2RC} = \frac{1}{CL};$$

$$I_L(t) = \frac{e}{R} - e^{-t/2RC} \frac{t}{2RC} + 1.$$

В первом случае зависимость $I_L(t)$ носит возрастающий колебательный характер. В двух последних случаях $I_L(t)$ возрастает монотонно и колебаний не возникает.

4. Точечный заряд q движется равномерно и прямолинейно с нерелятивистской скоростью v . Найти вектор плотности тока смещения в точке P , находящейся на расстоянии r_0 от заряда на прямой совпадающей с его траекторией.

Решение

Движущийся заряд возбуждает в окружающем пространстве электромагнитное поле. Согласно формуле (11) ток смещения может быть найден из выражения $j_c = \nabla D / \nabla t$. Таким образом, чтобы найти ток смещения в точке P достаточно вычислить в этой точке $\nabla D / \nabla t$. Чтобы это сделать нужно в начале найти вектор электрической индукции \vec{D} , который создается в точке P точечным движущимся зарядом. Для этого можно воспользоваться формулой (42) для запаздывающего скалярного потенциала. Если заряд движется в вакууме, то скалярный потенциал в окружающем пространстве дается выражением:

$$j(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{r(\vec{r}, t - r/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \quad (4.1)$$

Вследствие нерелятивистской скорости заряда запаздыванием в подынтегральном выражении можно пренебречь. Тогда $r(\vec{r}, t - r/c) = r(\vec{r}, t)$. Распределение заряда $r(\vec{r}, t)$ соответствующее

одиночному точечному заряду q , движущемуся со скоростью v имеет вид: $r(\vec{r}, t) = qd(\vec{r} - \vec{r}'/vt)$. Систему координат выберем таким образом, что в начальный момент времени $t = 0$ заряд находится в начале координат. Подставляя выражение для $r(\vec{r}, t)$ в (4.1) и используя свойства d -функции, можно выполнить интегрирование, после которого получаем:

$$j(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'/vt|} \quad (4.2)$$

Из (4.2) путем дифференцирования можно получить \vec{D} :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} = -\epsilon_0 \nabla j(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{(\vec{r} - \vec{r}'/vt)}{|\vec{r} - \vec{r}'/vt|^3}. \quad (4.3)$$

Выполняя дифференцирование по времени из (4.3) можно получить выражение для плотности тока смещения в любой момент времени и в любой точке пространства. В частности в точке, которая в момент времени $t = 0$ находится на расстоянии r_0 от заряда на линии его движения, имеем:

$$j_c = \nabla D / \nabla t |_{t=0, r=r_0} = \frac{1}{2\pi} \frac{qv}{r_0^3}. \quad (4.4)$$

Причем выражение для j_c справедливо как для точек расположенных впереди заряда q на линии его движения, так и сзади. Иной метод решения этой задачи приведен в учебном пособии: И.Е. Иродов Основные законы электромагнетизма: Учебное пособие. – М.: Высшая школа, 1991. – с. 257.

5. Определить типы волн, которые могут распространяться в прямоугольном волноводе с идеально проводящими стенками (длины сторон a и b). Найти закон дисперсии и зависимости полей от координат.

Решение

Все возможные типы волновых возмущений в волноводах с произвольным поперечным сечением могут быть выражены через суперпозицию волн, у которых $E_z \neq 0, H_z = 0$ и волн у которых, $E_z = 0, H_z \neq 0$, где предполагается, что ось z направлена вдоль оси волновода. Волны первого типа называются волнами электрического типа (E -волны или TM -волны). Волны второго типа называются волнами магнитного типа (H -волны или TE -волны). Типы волн, которые могут распространяться в произвольном волноводе, определяются

путем решения уравнений Максвелла при соответствующих граничных условиях. Поля волн, распространяющихся в регулярных (однородных вдоль оси) волноводах описываются выражениями вида

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{e}(x, y) \exp(i(k_z z - \omega t)), \\ \vec{H}(\vec{r}, t) &= \vec{h}(x, y) \exp(i(k_z z - \omega t)), \end{aligned} \quad (5.1)$$

где ω – частота волны, k_z – составляющая волнового вектора вдоль оси волновода (постоянная распространения), функции $\vec{e}(x, y)$ и $\vec{h}(x, y)$ называются функциями поперечного сечения.

Подставляя выражения (5.1) в уравнения Максвелла (15),(16), в которых полагаем $j = 0$, и используя материальные уравнения (20) для вакуума, имеем:

$$\text{rot} \vec{E} = i\omega \mu_0 \vec{H}, \quad \text{rot} \vec{H} = -i\omega \epsilon_0 \vec{E}. \quad (5.2)$$

Взяв rot от первого из уравнений (5.2) и используя второе, имеем:

$$\text{rot rot} \vec{E} = i\omega \mu_0 \text{rot} \vec{H} = k^2 \vec{E}, \quad (5.3)$$

где $k = \omega / c$.

Используя тождество $\text{rot rot} = \text{grad div} - \Delta$ и то, что в вакууме $\text{div} \vec{E} = 0$ уравнение (5.3) преобразуем к виду

$$(\Delta + k^2) \vec{E} = 0. \quad (5.4)$$

От уравнения (5.4) с помощью (5.1) можно перейти к уравнению для функции поперечного сечения. В частности для TM волн имеем

$$(\Delta_\perp + k_\perp^2) e_z(x, y) = 0, \quad (5.5)$$

где введены обозначения $\Delta_\perp = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $k_\perp^2 = k^2 - k_z^2$.

Уравнение (5.5) должно решаться с граничным условием на стенках волновода $E_t|_s = 0$, из которого в случае TM волн в прямоугольном волноводе следует:

$$e_z(0, y) = e_z(a, y) = e_z(x, 0) = e_z(x, b) = 0. \quad (5.6)$$

Система прямоугольных координат выбрана таким образом, что бы ее начало совпадало с одним из углов волновода, а ось x направлена вдоль стороны a .

Таким образом, для определения $e_z(x, y)$ имеем уравнение (5.5) с граничными условиями (5.6). Для решения этого уравнения можно использовать метод разделения переменных, согласно которому $e_z(x, y)$ представляем в виде:

$$e_z(x, y) = F(x)G(y). \quad (5.7)$$

С помощью (5.7) уравнение (5.5) можно преобразовать к виду:

$$\frac{1}{F(x)} \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2} + k_\perp^2 = - \frac{1}{G(y)} \frac{\partial^2 G(y)}{\partial y^2}. \quad (5.8)$$

Выражение, стоящее в правой части (5.8) зависит только от y , в то же время выражение в левой части (5.8) зависит только от x . Это означает, что обе части равенства (5.8) равны некоторой константе C , которая подлежит определению. При этом наша задача разделяется на две задачи для $F(x)$ и $G(y)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2} + (k_\perp^2 - C)F(x) &= 0; & \frac{\partial^2 G(y)}{\partial y^2} + CG(y) &= 0. \\ F(0) = F(a) = 0 & & G(0) = G(b) = 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

Решение второй из задач (5.9) ищем в виде

$$G(y) = A \sin \sqrt{C} y, \quad (5.10)$$

где A – произвольная константа.

Легко видеть, что граничное условие $G(0) = 0$ удовлетворяется автоматически. Для выполнения второго граничного условия $G(b) = 0$ необходимо, чтобы

$$\sin \sqrt{C} b = 0. \quad (5.11)$$

Из (5.11) следует, что допустимые значения C находятся по формуле:

$$C = \frac{\pi^2 n^2}{b^2}, \quad \text{где } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (5.12)$$

Первая задача решается аналогичным образом. Решение для $F(x)$ ищем в виде

$$F(x) = B \sin \sqrt{k_\perp^2 - C} x, \quad (5.13)$$

где B – произвольная константа.

Оно удовлетворяет граничному условию $F(0) = 0$. Для выполнения граничного условия $F(a) = 0$ необходимо, чтобы $\sin \sqrt{k_\perp^2 - C} a = 0$, что приводит к следующему дисперсионному уравнению

$$k_\perp^2 = \frac{\pi^2 m^2}{a^2} + \frac{\pi^2 n^2}{b^2}, \quad \text{где } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (5.14)$$

Решение этого дисперсионного уравнения имеет вид:

$$k_{zmn}(w) = \sqrt{k^2 - \frac{\pi^2 m^2}{a^2} - \frac{\pi^2 n^2}{b^2}}. \quad (5.15)$$

Выражения для $E_z(\vec{r}, t)$ имеет вид:

$$E_z(\vec{r}, t) = A \sin \frac{\pi m}{a} x \sin \frac{\pi n}{b} y \exp(i(k_z z - wt)). \quad (5.16)$$

Остальные компоненты полей выражаются через $E_z(\vec{r}, t)$ из уравнений Максвелла. Например, $E_y(\vec{r}, t)$ может быть найдено используя x -составляющую первого из уравнений (5.2) и y -составляющую второго из уравнений (5.2):

$$\frac{\nabla_y E_z}{\nabla_y} - \frac{\nabla_z E_y}{\nabla_z} = i w m_0 H_x, \quad \frac{\nabla_z H_x}{\nabla_z} = -i w e_0 E_y. \quad (5.17)$$

Дифференцируя первое из уравнений (5.17) по z , а затем, используя второе из уравнений (5.17) для исключения H_x , получим:

$$\begin{aligned} E_y(\vec{r}, t) &= \frac{1}{k_\lambda^2} \frac{\nabla_z^2}{\nabla_z \nabla_y} E_z(\vec{r}, t) = \\ &= \frac{i k_z}{k_\lambda^2} \frac{\pi n}{b} A \sin \frac{\pi m}{a} x \cos \frac{\pi n}{b} y \exp(i(k_z z - wt)). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Остальные компоненты полей выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} E_x(\vec{r}, t) &= \frac{1}{k_\lambda^2} \frac{\nabla_z^2}{\nabla_z \nabla_x} E_z(\vec{r}, t) = \\ &= \frac{i k_z}{k_\lambda^2} \frac{\pi m}{a} A \cos \frac{\pi m}{a} x \sin \frac{\pi n}{b} y \exp(i(k_z z - wt)); \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} H_x(\vec{r}, t) &= -\frac{i w e_0}{k_\lambda^2} \frac{\pi n}{b} A \sin \frac{\pi m}{a} x \sin \frac{\pi n}{b} y \exp(i(k_z z - wt)); \\ H_y(\vec{r}, t) &= \frac{i w e_0}{k_\lambda^2} \frac{\pi m}{a} A \cos \frac{\pi m}{a} x \sin \frac{\pi n}{b} y \exp(i(k_z z - wt)). \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$H_z(\vec{r}, t) = \frac{i w e_0}{k_\lambda^2} \frac{\pi m}{a} A \cos \frac{\pi m}{a} x \sin \frac{\pi n}{b} y \exp(i(k_z z - wt)). \quad (5.21)$$

Таким образом, в прямоугольном волноводе могут распространяться бесконечное количество волн TM поляризации, для которых дисперсионные кривые определяются выражением (5.15), а компоненты по-

лей выражениями (5.17)-(5.21). Эти волны называются модами прямоугольного волновода и обозначаются TM_{mn} , где m и n называются поперечными индексами.

Аналогичным образом можно показать, что в прямоугольном волноводе могут распространяться также счетное количество волн магнитного типа или TE мод. Они обозначаются TE_{mn} . Закон дисперсии для них такой же, как и для TM_{mn} . Все компоненты полей этих мод могут быть выражены через $H_z(\vec{r}, t)$, для которого справедливо выражение:

$$H_z(\vec{r}, t) = A \cos\left(\frac{\pi m}{a} x\right) \cos\left(\frac{\pi n}{b} y\right) \exp(i(k_z z - \omega t)), \quad (5.22)$$

где A – произвольная константа.

6. *Бесконечно протяженный диэлектрический слой с относительными проницаемостями ϵ и μ , заполняет в вакууме область $-a \leq x \leq a$. Показать, что такой слой может действовать как волновод (для этого нужно, чтобы поле бегущей волны концентрировалось в основном внутри слоя). Определить типы волн, которые могут распространяться в таком волноводе. Ограничиться случаем, когда поля не зависят от координаты y .*

Решение

Для определения типов волноводных мод поддерживаемых диэлектрическим слоем с неограниченным поперечным размером, запишем систему уравнений Максвелла:

$$\text{rot} \vec{E} = i w m_0 \vec{H}, \quad \text{rot} \vec{H} = -i w e_0 \vec{E};$$

в декартовых координатах, полагая $\nabla_y = 0$ и считая все поля пропорциональными $\exp(i(k_z z - wt))$

$$-i k_z E_y = i w m_0 H_x, \quad (6.1)$$

$$i k_z E_x - \frac{\nabla_x E_z}{\nabla_x} = i w m_0 H_y; \quad (6.2)$$

$$\frac{\nabla_x E_y}{\nabla_x} = i w m_0 H_z; \quad (6.3)$$

$$-i k_z H_y = -i w e_0 E_x; \quad (6.4)$$

$$i k_z H_x - \frac{\nabla_x H_z}{\nabla_x} = -i w e_0 E_y; \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = -i\omega\epsilon_0 E_z. \quad (6.6)$$

Как легко видеть, система уравнений (6.1)-(6.6) распадается на две совершенно независимых подсистемы. Первая подсистема - это уравнения (6.2), (6.4) и (6.6), в которых неизвестными являются компоненты полей E_x , H_y , E_z . Эта подсистема определяет моды TM поляризации. Все компоненты полей этой подсистемы удобно выражаются через H_y , для которого легко получить уравнение. Для этого нужно выразить E_x и E_z через H_y , пользуясь уравнениями (6.4) и (6.6) соответственно, и подставить их в (6.2). После несложных алгебраических преобразований получим:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} H_y + (k^2 m - k_z^2 / \epsilon) H_y = 0. \quad (6.7)$$

Хорошо известно, что любое распределение полей в диэлектрическом слое может быть представлено в виде суперпозиции симметричных ($E_z(x) = E_z(-x)$) и антисимметричных ($E_z(x) = -E_z(-x)$) мод. Поэтому можно ограничиться решением уравнения (6.7) в области $x > 0$. Далее уравнение (6.7) удобно решать отдельно в каждой из однородных областей: в вакууме ($x > a$) и в диэлектрике ($0 < x < a$). Кроме этого, удобно перейти к новой неизвестной функции не содержащей фазового множителя и зависящей только от x : $H_y = h_y(x) \exp(i(k_z z - \omega t))$. Тогда в вакууме (6.7) можно привести к виду:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} h_y - (k_z^2 - k^2) h_y = 0. \quad (6.8)$$

Общее решение уравнения (6.8) имеет вид:

$$h_y = A \exp(-k_{\lambda V} x) + B \exp(k_{\lambda V} x), \quad (6.9)$$

где A и B - неизвестные константы, $k_{\lambda V} = \sqrt{k_z^2 - k^2}$, причем для определенности и удобства выбирается ветвь корня для которого $\text{Re}(\sqrt{k_z^2 - k^2}) > 0$.

В открытых волноводах т. е. волноводах не ограниченных идеально проводящими стенками в поперечном направлении поле формально простирается до бесконечности в поперечном направлении. Однако поля волноводных мод при этом должны быть локализованы в основ-

ном в волноводе и должны затухать при стремлении поперечной координаты в бесконечность. В рассматриваемом случае h_y должно стремиться к нулю при $x \rightarrow \Gamma$. Это возможно, если $B = 0$, а $k_z > k$. Поэтому компоненты полей (без фазового множителя $\exp(i(k_z z - \omega t))$) в вакууме выглядят следующим образом:

$$h_y = A \exp(-k_{\lambda V} x), \quad e_x = \frac{k_z}{\omega\epsilon_0} h_y, \quad e_z = -\frac{ik_{\lambda V}}{\omega\epsilon_0} h_y, \quad (6.10)$$

где e_x и e_z вводятся следующим образом: $E_x = e_x(x) \exp(i(k_z z - \omega t))$, $e_z = e_z(x) \exp(i(k_z z - \omega t))$.

В диэлектрике ($0 < x < a$) уравнение (6.7) приобретает вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} h_y + (k^2 \epsilon m - k_z^2) h_y = 0. \quad (6.11)$$

Для симметричных мод $h_y(x) = -h_y(-x)$ решение уравнения (6.11) должно обращаться в нуль при $x = 0$. Такое решение имеет вид:

$$h_y = C \sin(k_{\lambda D} x), \quad (6.12)$$

где C - произвольная константа, $k_{\lambda D} = \sqrt{k^2 \epsilon m - k_z^2}$, причем $\text{Re}(\sqrt{k^2 \epsilon m - k_z^2}) > 0$.

Остальные компоненты полей выражаются через h_y следующим образом:

$$e_x = \frac{k_z}{\omega\epsilon_0} h_y, \quad e_z = \frac{ik_{\lambda D}}{\omega\epsilon_0} \cos(k_{\lambda D} x). \quad (6.13)$$

На границе раздела вакуум-диэлектрик ($x = a$) тангенциальные компоненты полей должны быть непрерывны. Поэтому нужно потребовать выполнения условий:

$$\begin{aligned} A \exp(-k_{\lambda V} a) &= C \sin(k_{\lambda D} a), \\ -\frac{ik_{\lambda V}}{\omega\epsilon_0} A \exp(-k_{\lambda V} a) &= \frac{ik_{\lambda D}}{\omega\epsilon_0} C \cos(k_{\lambda D} a); \end{aligned} \quad (6.14)$$

откуда находим связь между A и C , а также дисперсионное уравнение симметричных TM мод:

$$\frac{1}{k_{\lambda V}} + \frac{\epsilon}{k_{\lambda D}} \text{tg}(k_{\lambda D} a) = 0. \quad (6.15)$$

Уравнение (6.15) задает связь между частотой ω и волновым вектором k_z . Эта связь обычно иллюстрируется кривой $\omega(k_z)$ в $\omega - k_z$ плоскости. Уравнение (6.15) относительно ω и k_z является трансцен-

дентным и его решения, а следовательно и зависимость $w(k_z)$ могут быть найдены только численно. Графический способ решения уравнения типа (6.15) приведен в учебнике: В. В. Батыгин, И. Н. Топтыгин Сборник задач по электродинамике. – М.: Гос. Изд. Физ.-мат. Лит., 1962. – с. 347. Исследование уравнения (6.15) позволяет заключить, что при заданных w , a , e и m имеется конечное количество волноводных мод. Компоненты полей волноводных мод выглядят следующим образом:

$$h_y = A_0 \begin{cases} \exp(-k_{\lambda r}(x-a)), & x > a \\ \sin(k_{\lambda D}x), & 0 \leq x \leq a \end{cases},$$

$$e_x = \frac{k_z}{w\epsilon_0} h_y, e_z = \frac{1}{-i w \epsilon_0} \frac{\partial h_y}{\partial x}. \quad (6.16)$$

Аналогично могут быть проанализированы и симметричные моды TM поляризации, а также моды TE поляризации.

7. Найти возможные типы волн в круглом волноводе радиуса R , считая его стенки идеально проводящими. Определить граничную частоту такого волновода.

Решение

Для анализа волн в круглом волноводе удобно использовать цилиндрическую систему координат, начало которой находится на оси волновода. Так как, по азимутальному углу все поля должны быть периодичны с периодом 2π , то они должны быть пропорциональны множителю $\exp(i(k_z z + m\phi - \omega t))$, где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, - азимутальный номер, k_z и ω - как и ранее продольный волновой вектор и частота волн. Пользуясь тем же приемом, что и в задаче 5, для полей внутри волновода можно получить следующие уравнения:

$$(\mathbf{D} + k^2)\mathbf{E} = 0; (\mathbf{D} + k^2)\mathbf{H} = 0. \quad (7.1)$$

Ниже детально рассмотрим случаи TM и TE поляризаций.

В случае TM поляризации ($H_z = 0$) все поля могут быть выражены через E_z . Записывая оператор \mathbf{D} в цилиндрических координатах и представляя E_z в виде $E_z(r, t) = e_z(r) \exp(i(k_z z + m\phi - \omega t))$, получим уравнение для $e_z(r)$:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial e_z}{\partial r} \right) + \frac{m^2}{r^2} e_z(r) + (k^2 - k_z^2) e_z(r) = 0. \quad (7.2)$$

Общее решение уравнения (7.2) имеет вид:

$$e_z(r) = A J_m(k_{\lambda} r) + B N_m(k_{\lambda} r), \quad (7.3)$$

где $J_m(x)$ и $N_m(x)$ цилиндрические функции Бесселя и Неймана порядка m , A и B - произвольные константы, $k_{\lambda} = \sqrt{k^2 - k_z^2}$. Из условия ограниченности полей на оси следует, что $B = 0$. Из граничного условия на идеальной поверхности волновода следует, что $e_z|_{r=R} = 0$. Это приводит к дисперсионному уравнению:

$$J_m(k_{\lambda} R) = 0. \quad (7.4)$$

Решения уравнения (7.4) находятся из соотношений

$$k_{\lambda} R = m_{m,s}, \quad (7.5)$$

где $m_{m,s}$ - корни функции Бесселя порядка m , $s = 1, 2, \dots$, - порядковый номер корня (радиальный номер). Мода с азимутальным номером m и радиальным номером s обозначается $TM_{m,s}$. Полученное соотношение (7.5) может быть легко разрешено относительно частоты

$$\omega_{m,s}^{cut}(k_z) = c \sqrt{m_{m,s}^2 / R^2 + k_z^2}. \quad (7.5)$$

Наименьшая частота, при которой волна является распространяющейся называется критической частотой или частотой отсечки для данной моды. В рассматриваемом случае частоты отсечки равны частотам, которые задаются выражением (7.5), взятом при $k_z = 0$:

$$\omega_{m,s}^{cut} = c m_{m,s} / R.$$

Наинизшей критической частотой из TM мод обладает мода с номерами $m = 0, s = 1$. Она равна $\omega_{0,1}^{cut} = c m_{0,1} / R$, где $m_{0,1} \approx 2.405$.

Остальные компоненты полей TM мод находятся из уравнений Максвелла

$$\frac{im}{r} e_z - ik_z e_j = i w m_0 h_r, ik_z e_r - \frac{\partial e_z}{\partial r} = i w m_0 h_j,$$

$$k_z h_j = w e_0 e_r, k_z h_r = - w m_0 e_j, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r h_j) - \frac{im}{r} h_r = - i w e_0 e_z$$

Их можно представить в виде:

$$h_r = \frac{m}{r} \frac{k^2}{w m_0 k_{\lambda}^2} e_z, h_j = \frac{i}{w m_0} \frac{k^2}{k_{\lambda}^2} \frac{\partial e_z}{\partial r}, e_j = - \frac{k_z}{w m_0} h_r,$$

$$e_r = \frac{k_z}{\omega \epsilon_0} h_j. \quad (7.6)$$

Случай TE поляризации рассматривается аналогично. Соответствующее дисперсионное уравнение выглядит следующим образом:

$$J_m'(k_z R) = 0, \quad (7.7)$$

где $J_m'(x)$ - производная функции Бесселя порядка m . Выражения для частот имеют вид:

$$\omega_{m,s}(k_z) = c \sqrt{m_{m,s}^2 / R^2 + k_z^2}, \quad (7.8)$$

где $m_{m,s}^2$ - корни производной от функции Бесселя порядка m . Критические частоты определяются выражениями $\omega_{m,s}^{cut} = c m_{m,s}^2 / R$. Наименьшая критическая частота равна $c m_{0,1}^2 / R$, где $m_{0,1}^2 \approx 3.832$.

Таким образом наименьшей возможной частотой волны в круглом волноводе является критическая частота моды $TM_{0,1}$.

8. *Определить типы собственных колебаний в полом резонаторе с идеально проводящими стенками. Резонатор имеет форму прямоугольного параллелепипеда с размерами a и b и h .*

Решение

Данный резонатор можно рассматривать как отрезок прямоугольного волновода со сторонами a и b длиной h закрытый с обеих торцов идеальными стенками. Поэтому при решении этой задачи удобно воспользоваться результатами задачи 5, записывая искомые поля в виде суперпозиции волноводных волн, бегущих в прямом и обратном направлении по оси z . Тогда для волн TM поляризации (относительно оси z которую направим вдоль стороны h) в волноводе со стенками a и b имеем:

$$E_z(\vec{r}, t) = A \sin \frac{\pi m}{a} x \sin \frac{\pi n}{b} y \exp(i(k_z z - \omega t)) + B \sin \frac{\pi m}{a} x \sin \frac{\pi n}{b} y \exp(-i(k_z z - \omega t)). \quad (8.1)$$

Остальные компоненты полей выражаются через E_z в соответствии с уравнениями Максвелла (см. также формулы (5.18-5.21)). В частности

$$E_y(\vec{r}, t) = \frac{1}{k_z^2} \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} E_z(\vec{r}, t) = \frac{ik_z}{k_z^2} \frac{\pi n}{b} \frac{\pi m}{a} \exp(i(k_z z - \omega t)) - \frac{ik_z}{k_z^2} \frac{\pi n}{b} \frac{\pi m}{a} \exp(-i(k_z z - \omega t));$$

$$E_x(\vec{r}, t) = \frac{1}{k_z^2} \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} E_z(\vec{r}, t) = \frac{ik_z}{k_z^2} \frac{\pi m}{a} \frac{\pi n}{b} \exp(i(k_z z - \omega t)) - \frac{ik_z}{k_z^2} \frac{\pi m}{a} \frac{\pi n}{b} \exp(-i(k_z z - \omega t)). \quad (8.2)$$

$$E_x(\vec{r}, t) = \frac{1}{k_z^2} \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} E_z(\vec{r}, t) = \frac{ik_z}{k_z^2} \frac{\pi m}{a} \frac{\pi n}{b} \exp(i(k_z z - \omega t)) - \frac{ik_z}{k_z^2} \frac{\pi m}{a} \frac{\pi n}{b} \exp(-i(k_z z - \omega t)). \quad (8.3)$$

Выбранное представление (8.1-8.3) удовлетворяет граничным условиям на стенках a и b : $E_z = E_y = 0$ при $x = 0, x = a$; $E_z = E_x = 0$ при $y = 0, y = b$. Остается удовлетворить граничному условию на торцах волновода: $E_x = E_y = 0$ при $z = 0, z = h$. Приравнивая (8.2) и (8.3) к нулю в указанных точках, имеем:

$$A = B, \quad A \exp(ik_z(h)) = B \exp(-ik_z(h)). \quad (8.4)$$

Здесь как и в (8.1)-(8.3) k_z нужно считать функцией ω , которая определяется выражением (5.15). Из (8.4) следует, что

$$\sin(k_z(h)) = 0, \quad (8.5)$$

что и определяет собственные частоты резонатора. Пользуясь (5.15) находим их в явном виде:

$$h \sqrt{k^2 - \frac{\pi^2 m^2}{a^2} - \frac{\pi^2 n^2}{b^2}} = pl, \quad \text{где } l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

$$\text{откуда } \omega = c \sqrt{\frac{\pi^2 m^2}{a^2} + \frac{\pi^2 n^2}{b^2} + \frac{\pi^2 l^2}{h^2}}.$$

То же самое выражение для частот можно получить, используя другое возможное представление для полей – в виде суперпозиции волноводных мод TE поляризации относительно оси z . Поэтому одна и та же частота соответствует двум различным конфигурациям полей. Это означает, что собственные частоты прямоугольного резонатора двукратно вырождены. Если одно из чисел m, n, l равно нулю, то вырождение отсутствует. Однако, если размеры резонатора a, b, h относятся друг к другу как целые числа, то кратность вырождения возрастает.

Упражнения и задачи для самостоятельной работы

1. Круглая проволочная петля радиуса a , находящаяся в постоянном магнитном поле H_0 , вращается с угловой скоростью ω вокруг своего диаметра, перпендикулярного H_0 (см. рис. 11). Найти тормозящий момент $N(t)$.
2. Определить собственные частоты электрических колебаний в двух контурах (см. рис. 12), связь между которыми осуществляется через индуктивность L ($Z = i\omega L$).
3. К цепочке, состоящей из последовательно соединенных сопротивления R и индуктивности L , прикладывается прямоугольный импульс напряжения: $U_1(t) = U_0$, при $0 \leq t \leq T$, и $U_1(t) = 0$ при $t < 0$ и $t > T$. Найти напряжение на индуктивности $U_2(t)$.
4. Найти конфигурацию полей для волн TE поляризации относительно оси волновода z ($E_z = 0$) в прямоугольном волноводе со сторонами a и b . Вывести дисперсионное уравнение этих волн.
5. Диэлектрический слой с проницаемостями ϵ и m , заполняющий пространство $0 \leq x \leq a$, нанесен на поверхность идеального проводника. В области $x > a$ - вакуум. Найти типы электромагнитных волн, которые могут распространяться вдоль слоя с амплитудой убывающей при удалении от слоя.
6. Найти возможные типы волн TE поляризации, которые могут распространяться в круглом волноводе радиуса R , считая его стенки идеально проводящими. Рассмотреть волны электрического (TM) и магнитного (TE) типов.
7. Используя результат предыдущей задачи, найти коэффициенты затухания α , разных типов волн в круглом волноводе. Поверхностный импеданс стенок Z задан.
8. Вычислить среднюю погонную плотность энергии в круглом волноводе с идеально проводящими стенками.

9. Определить фазовую v_j и групповую v_g скорости волн в прямоугольном и круглом волноводе с идеально проводящими стенками. Построить их зависимость от $l = 2\pi c / \omega$.
10. Исследовать структуру волны TM поляризации в коаксиальном волноводе с проводящими стенками (большой и малый радиусы соответственно равны R_1 и R_2). Посчитать средний поток энергии \bar{S} через сечение волновода.
11. Резонатор имеет форму прямого кругового цилиндра высотой h и радиуса R . Считая стенки резонатора идеально проводящими, найти частоты собственных колебаний. Рассмотреть колебания электрического (TM) и магнитного (TE) типов.

Рекомендованная литература

Для заметок

1. А. И. Ахиезер, И. А. Ахиезер Электромагнетизм и электромагнитные волны. – М.: Высшая школа, 1985. – 504 с.
2. И. Е. Иродов Основные законы электро-магнетизма: Учебное пособие. – М.: Высшая школа, изд. 2, стереотипное, 1991. – 288 с.
3. А. Н. Матвеев Электричество и магнетизм. – М.: Высшая школа, 1983. – 464 с.
4. Д. Б. Головки, Маляренко, Ю. Л. Ментковський Загальні основи фізики: електродинаміка. – К.: Либідь, 1994. – 126 с.
5. Д. В. Сивухин Общий курс физики. Электричество. – М.: Наука, 1983. – 686 с.
6. В. В. Батыгин, И. Н. Топтыгин Сборник задач по электродинамике. – М.: Гос. Изд. Физ.-мат. лит., 1962. – 478 с.
7. И. Е. Тамм Основы теории электричества. – М.: Наука, 1966. – 624 с.

Для заміток

Навчальне видання

Загинайлов Геннадій Іванович

ОСНОВНІ ЗАКОНИ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЗМУ

Редактор І. Ю. Агаркова
Комп'ютерна верстка О. О. Бондаренко
Макет обкладинки І. М. Дончик

61077, Харків, майдан Свободи, 4, Харківський національний
університет імені В.Н.Каразіна, організаційно-видавничий
відділ НМЦ.

Підписано до друку 15.04.05. Формат 60x84/16.
Обл. вид. Арк. 4,0. Умов. друк. арк. 3,72. Наклад 50 прим.
Папір офсетний. Друк ризографічний. Ціна договірна.

Надруковано ПП Азамаєв В. Р.
м. Харків, вул. Героїв праці, 17