пространстве, каждый из которых составлен из двух и только двух видов трехмерных призм с правильными двумерными гранями так, что все вершины той или иной дуапризмы одинаково устроены. Комбинаторную структуру каждой дуапризмы найдем при помощи прямого произведения двух соответствующих правильных n- и m-угольников. Граф произвольной дуапризмы найдем при помощи декартового произведения двух соответствующих циклов. Например, прямое произведение двух квадратов дает комбинаторную структуру дуапризмы, тождественную четырехмерному кубу. Коксетер установил, что для каждой позиции матрицы размером (n, m), где n, m = 3, 4, 5, … можно поставить в соответствие одну и только одну дуапризму, полученную при помощи прямого произведения n- и m-угольников. Дуапризму Коксетера, полученную в результате прямого произведения n и m многоугольников будем обозначать скобками (n, m).

Постановка задачи. Назовем пирамиды над дуапризмами Коксетера пирамидами Коксетера первого рода. Очевидно это многогранники пятимерного пространства. Если вершина пирамиды расположена в пространстве основания пирамиды, то имеет в таком случае, например, для четырехмерного куба, лишь разбиение основания на пирамиды. Пирамиды с основаниями на пирамидах Коксетера первого рода назовем пирамидами Коксетера второго рода. Пирамиды Коксетера n – го рода это пирамиды над пирамидами Коксетера (n – 1) – го рода и расположены в (n + 4) – мерном пространстве. Аналогичная терминология вводится для бипирамид. То есть рассматриваются бипирамиды первого рода, пирамиды и бипирамидами второго рода с основаниями в виде пирамид и бипирамид первого рода и, аналогично, n – го рода. Таким образом, каждый представитель класса пирамид и бипирамид Коксетера n – го рода имеет в своем составе граней лишь одну дуапризму Коксетера. В сообщении будет приведено описание полного перечня пирамид и бипирамид Коксетера n – го рода. Метод изучения данного класса пирамид аналогичен методу, разработанному в [6, 7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Залгаллер В.А. Выпуклые многогранники с правильными гранями// Записки научн.семинаров ЛОМИ. – 1967. – С.1–220.
2. Johnson N.W. Convex polyhedra with regular faces// Canad. J. Math. – 1966. –v.18,№1. –P.169–200.
3. Гурин А.М, Залгаллер В.А. К истории изучения выпуклых многогранников с правильными гранями и гранями, составленными из правильных// Труды Санкт Петербургского матем. о–ва. – 2008. – т.14, – С.215–292.
4. Тимофеенко А.В. Выпуклые правильногранники с правильными гранями// Матем. Тр. – 2008. –т.11, №1.–С132–152.
5. Gosset Thorold. On the regular and semi-regular figures in space of n dimensions // Messenger of Mathematics. – 1900. – v.29, – P.43–48.
6. Петров Л.В., Гурин А.М., Попов А.Н. Выпуклые пирамиды 4-х мерного евклидового пространства с правильным гранями// Тез. докл. междунар. конф. «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях». – 2011. – С.148.
7. Гурин А.М., Петров Л.В., Попов А.Н. Пирамиды и бипирамиды в E^n с правильными гранями и правильными многогранниками в основании// Тез. докл. междунар. конф. «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях». – 2012.– С.42–43.
8. Coxeter H.S.M. Regular Skew Polyhedra in Three and Four Dimensions // Proc. LondonMath. Soc. – 1937. –v.43, –P.33–62.

ОБРАЩЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВНА ОСНОВЕ ДВУХ ОПЕРАТОРНИХ ТОЖДЕСТВ

Аршава Е.А.

Харьковский национальный университет строительства и архитектуры, Украина

Изучается задача обращения интегральных операторов методом операторных тождеств, что является продолжением исследований, представленных в работах [1–3].

В качестве интегрального оператора рассмотрим ограниченный оператор в $L_2(U)$, где $U = \{x : 0 < x_1 < \omega_1, 0 < x_2 < \omega_2\}$ – прямоугольник на плоскости, вида

$$Sf = \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_j}\int_U V(x,t)f(t)dt, \qquad (1)$$

$x = (x_1, x_2), t = (t_1, t_2), V(x,t) \in L_2(u), \forall x \in U.$ Такое представление для оператора верно при $k = 1, j = 2; k = 2, j = 1.$

Введем операторы

$$\hat{A}_1 f = \int_0^{x_1}(t_1 - x_1)f(t_1, x_2)dt_1,\ \hat{A}_1^* f = \int_{x_1}^{\omega_1}(x_1 - t_1)f(t_1, x_2)dt_1,$$

$$\hat{A}_2 f = \int_0^{x_2}(t_2 - x_2)f(x_1, t_2)dt_2,\ \hat{A}_2^* f = \int_{x_2}^{\omega_2}(x_2 - t_2)f(x_1, t_2)dt_2,$$

то есть $\hat{A}_1 = A_1^2,\ \hat{A}_{21} = A_2^2,$ где

$$A_1 f = i\int_0^{x_1} f(t_1, x_2)dt_1,\ A_2 f = i\int_0^{x_2} f(x_1, t_2)dt_2.$$

Доказаны

Теорема 1. *Если ядро оператора (1) удовлетворяет дифференциальному уравнению:*

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t_i^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}V(x,t) = 0,\ i = 1, j = 2; i = 2, j = 1,$$

тогда $(\hat{A}_k S - S\hat{A}_k^*)f = M_{1k}\cdot M_{2k}f, k = 1,2,$ где

$M_{11}f = x_1, M_{12}f = x_2,$

$$M_{21}f = \frac{\partial}{\partial x_2}\int_0^{\omega_1}\int_0^{\omega_2} V(0, x_2, t_1, t_2)f(t_1, t_2)dt_2 dt_1,$$

$$M_{22}f = \frac{\partial}{\partial x_1}\int_0^{\omega_1}\int_0^{\omega_2} V(x_1, 0, t_1, t_2) f(t_1, t_2) dt_2 dt_1.$$

Теорема 2. Если оператор S вида (1) имеет ограниченный обратный оператор $T = S^{-1}$, то верно равенство: $T\hat{A}_k - \hat{A}_k^* T = T\Pi_k T = \Gamma_k$,

где $\Pi_k = M_{1k} \cdot M_{2k}$.

Полученные соотношения можно представить в виде

$$T = (\lambda_k^2 - \nu_k^2)^{-1}\left[\lambda_k^2(E - \nu_k^2\hat{A}_k^*)T - \nu_k^2 T(E - \lambda_k^2\hat{A}_k) - \lambda_k^2\nu_k^2\Gamma_k\right].$$

Тогда

$$(E - \nu_k^2\hat{A}_k^*)^{-1}T(E - \lambda_k^2\hat{A}_k)^{-1} = (\lambda_k^2 - \nu_k^2)^{-1}\cdot$$
$$\cdot[\lambda_k^2 T(E - \lambda_k^2\hat{A}_k)^{-1} - \nu_k^2(E - \nu_k^2\hat{A}_k^*)T -$$
$$- \lambda_k^2\nu_k^2(E - \nu_k^2\hat{A}_k^*)^{-1}\Gamma_k(E - \lambda_k^2\hat{A}_k)^{-1}].$$

Так как

$$(E - \lambda_k^2\hat{A}_k)^{-1}(1 + i\lambda_k x_k) = e^{i\lambda_k x_k},$$
$$(E - \nu_k^2\hat{A}_k^*)^{-1}e^{-i\nu_k\omega_k}(1 + i(\omega_k - x_k)\nu_k) = e^{-i\nu_k x_k},$$

то для функции вида $\rho(\lambda,\nu) = \int_U (Te^{i\lambda x})e^{-i\nu x}dx, \quad \lambda x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2,$

которая играет важную роль в приложениях (задачи астрофизики, теория переноса излучения), может быть получено представление

$$\rho(\lambda,\nu) = \left\{(E - \nu_1^2\hat{A}_1^*)^{-1}(E - \nu_2^2\hat{A}_2^*)^{-1}T(E - \lambda_2^2\hat{A}_2)^{-1}(E - \lambda_1^2\hat{A}_1)^{-1}\phi, \bar{\psi}\right\}_U,$$

где $\{\cdot,\cdot\}_U$ − скалярное произведение в $L_2(U)$, а функции ϕ, ψ имеют вид:

$$\phi(x_1, x_2) = (1 + i\lambda_1 x_1)(1 + i\lambda_2 x_2),$$
$$\psi(x_1, x_2) = (1 + i(\omega_2 - x_2)\nu_2)e^{-i\nu_2\omega_2}\cdot(1 + i(\omega_1 - x_1)\nu_1)e^{-i\nu_1\omega_1}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Аршава Е.А., Янцевич А.А. Обращение интегральных операторов методом коммутационных соотношений. // Дифференциальные уравнения. – Минск, 1996. – Т.32, №10. – С. 1427–1428.
2. Аршава Е.А. Об одном классе интегральных уравнений со специальной правой частью. // Труды 5-й междунар.конф. «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений»: в 2 тт. – Т.1. Математический анализ. – Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2010. – С. 25 – 29.
3. Аршава Е.А. Обращение интегральных операторов на основе обобщенных коммутационных соотношений. // Матер.XIX Междунар.науч.-тех. конф.«Прикладные задачи математики и механики». – Севастополь, 2011. – С. 148–151.

МАТЕМАТИЧНІ ТА ДИСКРЕТНІ МОДЕЛІ ЗАДАЧІ ДИФРАКЦІЇ НА ЕЛІПТИЧНОМУ ЦИЛІНДРІ

Бахмат Ю.М.

Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна, Україна

У даній роботі розглядаються математичні моделі задачі дифракції електромагнітних хвиль на еліптичному циліндрі. Ці моделі базуються на граничних інтегральних рівняннях відповідної краєвої задачі з першою (випадок Е-поляризації), з другою (випадок Н-поляризації), а також з третьою граничною умовою (Е-поляризація, імпедансний циліндр) для рівняння Гельмгольця. Побудовані дискретні математичні моделі вище зазначених задач дифракції на основі метода дискретних особливостей. Саме запропонований метод ефективно працює тоді, коли виникають сингулярні та гіперсингулярні інтегральні рівняння. Дана задача представляє зараз інтерес, оскільки цікаво буде дослідити питання про стискання еліпса у стрічку, з подальшим порівнянням діаграм направленості.

Постановка задачі. Хай *L*– проста гладка замкнена крива, направляюча циліндричної поверхні (у даному випадку еліптичний циліндр), твірні якої паралельні OX_3. Розглядається перетин площиною, паралельною площині X_1OX_2, розглядається задача двовимірна. Ω – область, обмежена контуром *L*.

Як відомо [1], єдина відмінна від нуля компонента розсіяного електричного (магнітного) поля задовольняє рівнянню Гельмгольця

$$\Delta u(x) + \chi^2 \cdot u(x) = 0, \quad x \in C\overline{\Omega}, \ \chi^2 = \varepsilon\cdot\mu\cdot\omega^2. \quad (1)$$

Оскільки крайова задача зовнішня, то шукана функція повинна задовольняти умові випромінювання Зомерфельда:

$$\begin{cases} u(x) = O\left(\dfrac{1}{\sqrt{r}}\right), \\ \dfrac{\partial u(x)}{\partial r} - i\chi u(x) = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad r \to \infty. \end{cases} \quad (2)$$

На поверхні виконується гранична умова (для випадку Е-поляризації, Н-поляризаціїта імпедансного циліндру відповідно):

$$u^p(x) = 0, \ x \in L \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial n}u^p(x) = 0, \quad x \in L, \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial n}u^p(x) + h_E u^p(x) = 0, \ h_E = \frac{i\omega\mu\mu_0}{Z}, \ x \in L, \quad (5)$$

де $u^p(x)$– повне поле, що є сумою падаючого ($u^0(x)$) та розсіяного ($u(x)$) полів.

Використавши третю формулу Гріна, виразили розсіяне поле для трьох вище вказаних випадків відповідно:

$$u(y) = \frac{c_0}{2\pi}\int_L \frac{\partial}{\partial n_x}u^p(x)H_0^{(1)}(\chi\cdot|x-y|)ds_x, \quad (7)$$

$$u(y) = -\frac{c_0}{2\pi}\int_L \frac{\partial}{\partial n_x}H_0^{(1)}(\chi\cdot|x-y|)u^p(x)ds_x, \quad (8)$$

$$u(y) = \frac{c_0}{2\pi}\int_L\left(-h_E\cdot H_0^{(1)}(\chi\cdot|x-y|) - \frac{\partial}{\partial n_x}H_0^{(1)}(\chi\cdot|x-y|)\right)\cdot u^p(x)ds_x. \quad (9)$$

де $y \in C\overline{\Omega}$.