$$M_{21}f = \frac{\partial}{\partial x_2}\int_0^{\omega_1}\int_0^{\omega_2} V(0,x_2,t_1,t_2)f(t_1,t_2)dt_2dt_1,$$

$$M_{22}f = \frac{\partial}{\partial x_1}\int_0^{\omega_1}\int_0^{\omega_2} V(x_1,0,t_1,t_2)f(t_1,t_2)dt_2dt_1.$$

Теорема 2. Если оператор S вида (1) имеет ограниченный обратный оператор $T = S^{-1}$, то верно равенство: $T\hat{A}_k - \hat{A}_k^* T = T\Pi_k T = \Gamma_k$,

где $\Pi_k = M_{1k}\cdot M_{2k}$.

Полученные соотношения можно представить в виде

$$T = (\lambda_k^2 - \nu_k^2)^{-1}\left[\lambda_k^2(E-\nu_k^2\hat{A}_k^*)T - \nu_k^2 T(E-\lambda_k^2\hat{A}_k) - \lambda_k^2\nu_k^2\Gamma_k\right].$$

Тогда

$$(E-\nu_k^2\hat{A}_k^*)^{-1}T(E-\lambda_k^2\hat{A}_k)^{-1} = (\lambda_k^2-\nu_k^2)^{-1}\cdot$$
$$\cdot[\lambda_k^2 T(E-\lambda_k^2\hat{A}_k)^{-1} - \nu_k^2(E-\nu_k^2\hat{A}_k^*)T -$$
$$-\lambda_k^2\nu_k^2(E-\nu_k^2\hat{A}_k^*)^{-1}\Gamma_k(E-\lambda_k^2\hat{A}_k)^{-1}].$$

Так как

$$(E-\lambda_k^2\hat{A}_k)^{-1}(1+i\lambda_k x_k) = e^{i\lambda_k x_k},$$

$$(E-\nu_k^2\hat{A}_k^*)^{-1}e^{-i\nu_k\omega_k}(1+i(\omega_k - x_k)\nu_k) = e^{-i\nu_k x_k},$$

то для функции вида

$$\rho(\lambda,\nu) = \int_U (Te^{i\lambda x})e^{-i\nu x}dx, \qquad \lambda x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2,$$

которая играет важную роль в приложениях (задачи астрофизики, теория переноса излучения), может быть получено представление

$$\rho(\lambda,\nu) = \left\{(E-\nu_1^2\hat{A}_1^*)^{-1}(E-\nu_2^2\hat{A}_2^*)^{-1}T(E-\lambda_2^2\hat{A}_2)^{-1}(E-\lambda_1^2\hat{A}_1)^{-1}\phi,\bar{\psi}\right\}_U,$$

где $\{\cdot,\cdot\}_U$ – скалярное произведение в $L_2(U)$, а функции ϕ, ψ имеют вид:

$$\phi(x_1,x_2) = (1+i\lambda_1 x_1)(1+i\lambda_2 x_2),$$

$$\psi(x_1,x_2) = (1+i(\omega_2 - x_2)\nu_2)e^{-i\nu_2\omega_2}\cdot(1+i(\omega_1 - x_1)\nu_1)e^{-i\nu_1\omega_1}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Аршава Е.А., Янцевич А.А. Обращение интегральных операторов методом коммутационных соотношений. // Дифференциальные уравнения. – Минск, 1996. – Т.32, №10. – С. 1427–1428.
2. Аршава Е.А. Об одном классе интегральных уравнений со специальной правой частью. // Труды 5-й междунар.конф. «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений»: в 2 тт. – Т.1. Математический анализ. – Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2010. – С. 25 – 29.
3. Аршава Е.А. Обращение интегральных операторов на основе обобщенных коммутационных соотношений. // Матер.XIX Междунар.науч.-тех. конф.«Прикладные задачи математики и механики». – Севастополь, 2011. – С. 148–151.

МАТЕМАТИЧНІ ТА ДИСКРЕТНІ МОДЕЛІ ЗАДАЧІ ДИФРАКЦІЇ НА ЕЛІПТИЧНОМУ ЦИЛІНДРІ

Бахмат Ю.М.

Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна, Україна

У даній роботі розглядаються математичні моделі задачі дифракції електромагнітних хвиль на еліптичному циліндрі. Ці моделі базуються на граничних інтегральних рівняннях відповідної краєвої задачі з першою (випадок Е-поляризації), з другою (випадок Н-поляризації), а також з третьою граничною умовою (Е-поляризація, імпедансний циліндр) для рівняння Гельмгольця. Побудовані дискретні математичні моделі вище зазначених задач дифракції на основі метода дискретних особливостей. Саме запропонований метод ефективно працює тоді, коли виникають сингулярні та гіперсингулярні інтегральні рівняння. Дана задача представляє зараз інтерес, оскільки цікаво буде дослідити питання про стискання еліпса у стрічку, з подальшим порівнянням діаграм направленості.

Постановка задачі. Хай *L*– проста гладка замкнена крива, направляюча циліндричної поверхні (у даному випадку еліптичний циліндр), твірні якої паралельні OX_3. Розглядається перетин площиною, паралельною площині X_1OX_2, розглядається задача двовимірна. Ω – область, обмежена контуром *L*.

Як відомо [1], єдина відмінна від нуля компонента розсіяного електричного (магнітного) поля задовольняє рівнянню Гельмгольця

$$\Delta u(x) + \chi^2\cdot u(x) = 0,\ \ x\in C\overline{\Omega},\ \chi^2 = \varepsilon\cdot\mu\cdot\omega^2. \quad (1)$$

Оскільки крайова задача зовнішня, то шукана функція повинна задовольняти умові випромінювання Зомерфельда:

$$\begin{cases} u(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \\ \frac{\partial u(x)}{\partial r} - i\chi u(x) = o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad r\to\infty. \end{cases} \quad (2)$$

На поверхні виконується гранична умова (для випадку Е-поляризації, Н-поляризаціїта імпедансного циліндру відповідно):

$$u^p(x) = 0,\ x\in L \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial n}u^p(x) = 0, \quad x\in L, \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial n}u^p(x) + h_E u^p(x) = 0,\ h_E = \frac{i\omega\mu\mu_0}{Z},\ x\in L, \quad (5)$$

де $u^p(x)$– повне поле, що є сумою падаючого ($u^0(x)$) та розсіяного ($u(x)$) полів.

Використавши третю формулу Гріна, виразили розсіяне поле для трьох вище вказаних випадків відповідно:

$$u(y) = \frac{c_0}{2\pi}\int_L \frac{\partial}{\partial n_x}u^p(x)H_0^{(1)}(\chi\cdot|x-y|)ds_x, \quad (7)$$

$$u(y) = -\frac{c_0}{2\pi}\int_L \frac{\partial}{\partial n_x}H_0^{(1)}(\chi\cdot|x-y|)u^p(x)ds_x, \quad (8)$$

$$u(y) = \frac{c_0}{2\pi}\int_L\left(-h_E\cdot H_0^{(1)}(\chi\cdot|x-y|) - \frac{\partial}{\partial n_x}H_0^{(1)}(\chi\cdot|x-y|)\right)\cdot u^p(x)ds_x. \quad (9)$$

де $y\in C\overline{\Omega}$.

Продиференцюємо (8) і (9) по нормалі, (7) залишимо без змін, а потім перейдемо на контур і тоді отримаємо такі граничні інтегральні рівняння:

$$u^0(x_0) = \frac{-1}{2\pi}\int_L \frac{\pi \cdot i}{2} H_0^{(1)}(\chi \cdot |x - x_0|) \frac{\partial}{\partial n_x} u^p(x) ds_x, \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} u^0(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_L \frac{\pi \cdot i}{2} \frac{\partial^2}{\partial n \partial n_0} H_0^{(1)}(\chi \cdot |x - x_0|) u^p(x) ds_x, \quad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} u^0(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_L \begin{pmatrix} -h_E \dfrac{\pi \cdot i}{2} \dfrac{\partial}{\partial n} H_0^{(1)}(\chi \cdot |x - x_0|) + \\ + \dfrac{\partial^2}{\partial n \partial n_0} H_0^{(1)}(\chi \cdot |x - x_0|) \end{pmatrix} \cdot \quad (12)$$

$$\cdot u^p(x) ds_x - h_E \cdot u^p(x_0).$$

де $x_0 \in L$.

Шляхом виділення особливостей в (10)–(12), переходу до задачі для наближеного розв`язку та застосування методу дискретних особливостей [2], були побудовані дискретні математичні моделі трьох поставлених вище задач.

Висновок. Таким чином, були побудовані математичні та дискретні моделі задачі дифракції на еліптичному циліндрі з різними краєвими умовами. Застосовувався метод дискретних особливостей. Надалі буде проведений чисельний експеримент, а потім і порівняння діаграм направленості для еліпса і стрічки у випадку, коли одна вісь еліпса береться малою по відношенню до іншої.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гандель Ю.В., Еременко С.В., Полянская Т.М Математические вопросы метода дискретных токов // Обоснование численного метода дискретных особенностей решения двумерных задач дифракции электромагнитных волн: Учебное пособие.Часть 2. – Харьков: ХГУ, 1992. – 145с.

2. Гандель Ю.В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Учебное пособие. – Харьков, ХНУ, 2002

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СТАБИЛИЗАЦИИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ НЕУПРАВЛЯЕМЫХ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ СИСТЕМ

Бебия М.О.

ХНУ имени В.Н. Каразина, Харьков, Украина.

Рассматривается задача стабилизации для нелинейной системы вида

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = u, \dot{x}_i = x_{i-1} + f_{i-1}(t, x_1, \ldots, x_n), \\ &\dot{x}_n = x_{n-1}^{2k+1} + f_{n-1}(t, x_1, \ldots, x_n), \end{aligned} \quad (1)$$

где

$i = \overline{1, n-1}$, $x = (x_1, \ldots x_n)^* \in E^n$, $k \in N$, $f(0, \ldots, 0) = 0$.

Задача стабилизации для системы (1) состоит в отыскании управления $u(x)$ такого, что при $u = u(x)$ нулевая точка покоя системы (1) будет асимптотически устойчива. Основной трудностью при исследовании задачи стабилизации для системы (1) является тот факт, что данная система неуправляема по первому приближению. Системы подобного типа рассматривались, например, в работах [1–3].

Управление, решающее задачу стабилизации для системы (1), выбирается в виде $u(x) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n + a_{n+1} x_{n-1}^{2k+1}$. Получение условий на коэффициенты a_i, $i = \overline{1, n+1}$ проводится на основании метода функции Ляпунова, которую удаётся найти в виде квадратичной формы $V = (Fx, x)$. Матрица F находится как положительно определённое решение неравенства Ляпунова $A^* F + FA < 0$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Даётся описание области притяжения.

ЛИТЕРАТУРА

1. KawskiM. Stabilizationofnonlinearsystemsintheplane // SCL. – 1989. – 12. – 169. – P. 175.

2. Long L., Zhao J. Global stabilization of switched nonlinear systems in p-normal form with mixed odd and even powers // Int. J. Contr. – 2011. – v.84, N10. – P. 1612-1626.

3. Gao F., Li P., Yuan F. Finite-time stabilization of high-order nonholonomic systems with more general nonlinear drifts // JICS. – 2013. – 10, – No 4. – P. 1139–1147.

ОЦЕНКА СОСТОЯНИЯ ГИДРОБИОЦИНОЗА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

[1]**Беспалов Ю.Г., [2]Бых А.И., [2]Высоцкая Е.В., [2]Печерская А.И.*

[1]Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина

[2]Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Украина

Ряд проблем биобезопасности связан с дисбалансом биопродукционных процессов (ДБП) в гидробиоценозах. В настоящее время в результате активного развития вычислительных средств, созданы предпосылки к решению задачи прогнозирования ДБП на качественно новом уровне, а именно с использованием моделей динамических систем.

Решение задачи оценки состояния гидробиоциноза проводилось нами на основе разработанной информационной базы данных, являющейся основой согласования результатов расчетов по моделям дискретных динамических систем (ДМДС) [1] с использованием системных процедур.