2. http://cordis.europa.eu/projects/rcn/104754_en.html международный Европейский проект «Innopipes».
3. Бесчетников Д.А., Львов Г.И. Контактная задача для цилиндрической оболочки с бандажом из композитного материала // Вестник НТУ «ХПИ». – 2012. – № 67. – С. 19–25.
4. Пелех Б.Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью – К.: Наукова думка, 1973. – 246с.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АЛГОРИТМА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ПРИ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

Бобылев Д.Е.

Криворожский национальный университет, г. Кривой Рог, Украина

При решении однородных задач на внешней границе обычно задаются только вектор усилия и уравнение системы

$$u_i^{[n]}(Q) = \int\limits_{\partial\Omega^{[n]}} I_{i;k}^{[n]}(Q, q_0) f_k^{[n]}(q_0)\, dl \tag{1}$$

не используется. Однако при рассмотрении кусочно-однородных тел на внутренних контактах приходится иметь дело с данным уравнением, которое является интегральным уравнением первого рода. Это обстоятельство, а также достаточно высокий порядок системы

$$\left.\begin{aligned} b_{xi} &= \sum_{j=1}^{N} A'_{ij} f_{xj} + \sum_{j=1}^{N} B'_{ij} f_{yj} \\ b_{yi} &= \sum_{j=1}^{N} C'_{ij} f_{xj} + \sum_{j=1}^{N} D'_{ij} f_{yj} \end{aligned}\right\} i = 1, \ldots, N \tag{2}$$

и отсутствие диагонального преобладания приводит к плохой обусловленности. Уравнения, полученные в (2) для близко расположенных друг к другу граничных элементов слабо различимы. Данный факт приводит к невозможности получения корректного численного решения при непосредственном применении к системе (2) известных методов решения линейных уравнений. Итерационные методы демонстрировали расхождение невязки уже с первых итераций. Прямые методы давали решение, не соответствующее физической природе рассматриваемых задач.

Данные результаты послужили причиной разработки методики регуляризации численного решения СЛАУ, основанной на методе А.Н. Тихонова [1, 3].

Метод регуляризации. При численном решении система интегральных уравнений метода граничных элементов с использованием квадратурной формулы прямоугольников приводится к системе линейных алгебраических уравнений (2). Представим данную систему в виде:

$$Ax = b\,. \tag{3}$$

Вследствие неустойчивости системы существует множество решений системы, которые с заданной степенью точности удовлетворяют (3). Тогда её решение неоднозначно и пусть Q – совокупность всех возможных решений. В этих условиях ставится задача нахождения нормального решения x^* относительно некоторого вектора x_0. Это решение определяется условием

$$\left\| x^* - x_0 \right\| = \inf_{x\in Q} \left\| x - x_0 \right\|. \tag{4}$$

Доказано [2], что для замкнутого и выпуклого множества Q элемент x^* определён однозначно и в случае регулярных задач совпадает с единственным решением системы. Таким образом, понятие нормального решения обобщает понятие решения как «плохих», так и хороших систем.

Следовательно, необходимо из этого множества выбрать решение, отвечающее определённым требованиям. Поставим задачу отбора решения, которое обеспечивает минимум функционала

$$\Omega[x] = \left\| x - x_0 \right\|^2, \tag{5}$$

где Ω – сильно выпуклый функционал, определённый в гильбертовом пространстве X элементов x, и такой, что множество $\bar{X} = \{x : \Omega[x] \le C, C > 0\}$ – есть компакт в X. Естественно, что решение задачи при точных исходных данных является элементом множества $\bar{X}$. Согласно определению (4), отобранное таким образом решение естественно назвать приближённым решением.

Поскольку функционал (5) регуляризующий, а также квазимонотонный [5], то задача минимизации (5) на множестве элементов X эквивалентна задаче минимизации сглаживающего параметрического функционала А.Н. Тихонова [5] на множестве элементов x

$$f(x) = \left\| Ax - b \right\|^2 + \alpha \left\| x \right\|^2, \tag{6}$$

где $\alpha = \alpha > 0$ параметр регуляризации, A – матрица СЛАУ из (3), b – вектор граничных условий.

Доказано [3], что решение задачи (6) является регуляризующим, поскольку отвечает основным принципам регуляризации: решение существует, единственно и устойчиво.

В данной работе изложен легко реализуемый на практике алгоритм решения задачи (6), который состоит из многократных формирований и решений систем линейных уравнений конечными методами. Алгоритм содержит внешний и внутренний циклы, которые обеспечивают выполнение условия, свидетельствующего о получении регуляризованного решения системы (3).

Построен алгоритм регуляризации решения плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений, появляющихся после дискретизации системы интегральных уравнений, описывающих задачу расчёта напряжённого состояния кусочно-однородных тел.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Некорректные задачи. Численные методы и приложения. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. – 200 с.
2. Морозов В.А. О регуляризации некоторых классов экспериментальных задач // Вычислительные методы и программирование. – Т.12. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1969. – с. 24 – 37.
3. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. М.: Наука, 1983. – 200 с.

ВОЗМОЖНОСТЬ НАБЛЮДЕНИЯ БРИЗЕРНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ В НАНОМАГНИТНЫХ МЕТАМАТЕРИАЛАХ С ЛОКАЛЬНОЙ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ МАГНИТНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТЬЮ

*Богдан М.М., *Чаркина О. В.*

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Харьков

В последнее десятилетие было экспериментально установлено, что новые наномагнитные метаматериалы в терагерцевом диапазоне могут демонстрировать уникальные свойства, в том числе отрицательную магнитную проницаемость. Теоретически было показано, что электромагнитные возбуждения в одно- или двумерных наносистемах индуктивно связанных расщепленных кольцевых резонаторов (РКР) с нелинейными элементами (типа диодов или нановключений керровских сред описываются дискретными уравнениями, которые обладают осциллирующими локализованными решениями – дискретными бризерами [1]. В частности, было численно обнаружено, что в малой области метаматериала (порядка нескольких постоянных решетки), где возбуждается дискретный бризер, магнитный отклик может быть отрицательным. К сожалению, аналитическое описание динамики таких нелинейных возбуждений в сильно дискретном случае сталкивается с трудностями не только математического, но и физического характера, поскольку антиконтинуальный предел существования обнаруженных дискретных бризеров не согласуется с макроскопическим континуальным определением магнитной проницаемости.

В данной работе предложено аналитическое описание и построена теория локальной отрицательной магнитной проницаемости в нелинейном метаматериале, содержащем магнитоиндуцированные бризеры. Предложена модификация магнитного метаматериала, в котором учитывается не только индуктивная, но и дополнительная емкостная связь между соседними РКР. Показано, что одномерная система таких связанных резонаторов в длинноволновом пределе может быть описана нелинейным регуляризованным уравнением Клейна-Гордона (КГУ) [2]с четвертой смешанной производной для безразмерной зарядовой переменной $u(x,t)$, с дополнительными членами, описывающими затухание и внешнюю переменную силу:

$$u_{tt} + \lambda u_t - u_{xx} - \beta u_{xxtt} + u - \eta u^3 = e_0 \cdot \cos(\omega t) \qquad (1)$$

где t и x – время и координата, λ, β и η – соответственно коэффициенты диссипации, дисперсии и нелинейности, а правая часть отвечает индуцированной магнитным полем Е.Д.С. с амплитудой e_0 и частотой ω. С помощью асимптотической процедуры Косевича-Ковалева [2] получено аналитическое решение для резонансного бризерного возбуждения в виде ряда по малому параметру отщепления частоты от нижнего края спектра $\varepsilon = \sqrt{1-\omega^2} << 1$. Такое решение представляет собой солитон на «пьедестале» – бризер, осциллирующий в противофазе по отношению к фону однородных колебаний. Аналитически описан нелинейный отклик на высокочастотное магнитное поле метаматериала с возбужденным бризером, найдены частотные и пространственные зависимости магнитной восприимчивости и проницаемости и показано, что в области солитона обе они становятся отрицательными. С помощью численного моделирования исследована устойчивость таких вынужденных бризерных мод в рамках регуляризованного КГУ с внешней накачкой (рис.1). Определена область параметров высокочастотного поля, для которых наблюдаются устойчивые режимы нелинейного отклика системы с локальной отрицательной магнитной проницаемостью.

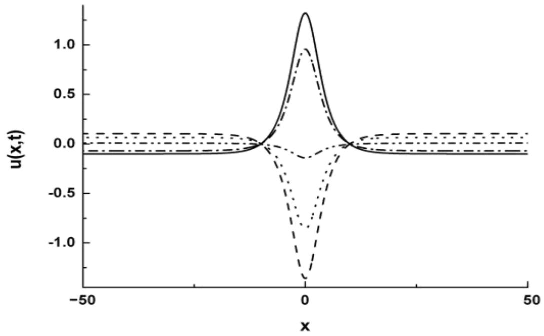

Рис.1.Устойчивые режимы вынужденных бризерных колебаний при значениях параметров дисперсии $\beta = 1/8$ и накачки $\omega = 0.95,\ e_0 = 0.01$.

Таким образом, найдено, что длинноволновые динамические свойства наномагнитных метаматериалов, состоящих из индуктивно и емкостно связанных расщепленных кольцевых резонаторов, описываются нелинейными регуляризированными уравнениями Клейна-Гордона. Показано, что в таких нелинейных системах происходит возбуждение бризеров – солитонов на «пьедестале» с отрицательной амплитудой в конечной области метаматериала, что реализует ситуацию с локальной отрицательной магнитной проницаемостью. Дополненная средой с отрицательной диэлектрической проницаемостью