(ii) Множество $\boldsymbol{I}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{d}}$ *содержит универсальный элемент* **L** *такой, что* M (**L**) $< \infty$.
(iii) E является равномерно сильно пористым множеством.

Сформулированные результаты используются для описания условий равномерной ограниченности и равномерной дискретности пространств, предкасательных к заданному метрическому пространству в фиксированной точке (см. [2]). Для описания условий ограниченности всех пространств, предкасательных к заданному метрическому пространству в отмеченной точке, рассматривается некоторая модификация $\tilde{\tau}$ – сильно пористые множества в точке (см. [3]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Thomson B. S. Real Functions. Lecture Notes in Mathematics, v. 1170. Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, NewYork, Tokyo, 1985. – 229 p.
2. БилетВ. В., ДовгошейА. А. Инфинитезимальнаяограниченностьметрическихпространствисильнаяодностороннняяпористость //Доповіді НАН України. – 2013. – № 2. – С. 13 – 18.
3. Bilet V. V., Dovgoshey O. A. Boundedness of pretangent spaces to general metric spaces // Annales Academiæ Scientarum Fennicæ Mathematica. – 39. – doi: 10.5186 / aasfm 2014.3902 (in print).

ОТТАЛКИВАНИЕ УРОВНЕЙ И ДИНАМИЧЕСКОЕ ТУННЕЛИРОВАНИЕ В КОЛЬЦЕВОМ БИЛЛИАРДЕ

*[*1]Вакульчик И.Ю., [2]Черкасский В.А.*

[1]Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина
[2]ИТФ им. А.И. Ахиезера ННЦ ХФТИ НАН Украины, Харьков, Украина

В течение последних десятилетий начала активно развиваться новая область исследований, посвященная изучению так называемого квантового хаоса. Под этим понятием подразумевается поведение квантовых систем, чей классический аналог демонстрирует хаотическую динамику.

Одним из наиболее простых классов систем, проявляющих хаотичность, являются плоские биллиарды: двумерные одночастичные беспотенциальные системы, ограниченные в конечной области. Динамика (как классическая, так и квантовая) таких систем определяется исключительно геометрией границы. В данной работе граница выбрана следующим образом: движение происходит в области между двумя окружностями различного радиуса. Такая система называется кольцевым биллиардом. Кольцевой биллиард является чисто регулярным, если окружности его границы имеют общий центр, и демонстрирует хаотическую динамику в ином случае. Кольцевой биллиард – широко изучаемая в данном контексте система [1–3]. Помимо удобства для изучения фундаментальных свойств квантового хаоса, кольцевой биллиард представляет интерес для экспериментальных и прикладных исследований, в рамках которых является моделью микроволновых полостей [4–5].

При смещении центра внутренней окружности от центра внешней система перестает быть интегрируемой (регулярной) и постепенно начинает проявлять хаотические свойства. Для классической системы это проявляется в постепенном разрушении регулярных торов. Удобным инструментом, позволяющим изучать этот процесс, является построение сечений Пуанкаре для биллиардов. Они сводят полную динамику системы к отображениям координат и углов падения частицы в моменты столкновений с границей.

В квантовом случае важным эффектом хаотизации является появление так называемых отталкиваний уровней (avoided crossings). Заключается он в следующем: при изменении параметра сдвига центра внутреннего диска меняются энергии всех состояний системы. Некоторые из уровней энергии начинают сближаться. Но, ввиду ограничений, накладываемых симметрией, энергии уровней одинаковой симметрии не могут пересечься, поэтому при достаточно большом приближении они начинают отталкиваться. Это явление может повлечь за собой появление так называемого динамического туннелирования: туннелирования между состояниями, переход между которыми в классическом случае запрещен не наличием потенциального барьера, а уравнениями динамики [2].

Цель данной работы: изучить отталкивание хаотических и регулярных уровней в кольцевом биллиарде, а так же возникающее при этом динамическое туннелирование. Кроме рассмотрения собственно квантовой задачи проведено сопоставление результатов с классической динамикой путем изучения взаимосвязи классического сечения Пуанкаре и одного из его квантовых аналогов, функций Хусими-Пуанкаре.

Математически, задача о квантовом биллиарде выражается двумерным свободным уравнением Шредингера

$$\left(\mathrm{k}^2 + \Delta\right)\psi(\mathbf{r}) = 0,\ \mathbf{r} \in \Omega, \qquad (1)$$

где Ω – область биллиарда. Упругим стенкам соответствует граничное условие Дирихле

$$\psi(\mathbf{r} \in \partial\Omega) = 0. \qquad (2)$$

Для численного решения уравнения (1) использован метод интеграла по границе. Он позволяет с помощью функций Грина однородного уравнения Шредингера свести двумерное дифференциальное уравнение (1) с граничными условиями (2) к одномерному интегральному уравнению относительно нормальной производной волновой функции на границе. Получаемое таким образом интегральное уравнение путем дискретизации приводится к системе линейных однородных уравнений, решения которых находятся из анализа сингулярного разложения матрицы системы. Данный метод позволяет эффективно решить проблему нахождения квазивырожденных состояний, типичную для этого класса задач [6].

В результате применения этого метода численно получены энергетические уровни и волновые функции состояний кольцевого биллиарда в области спектра, в которой проявляются хаотические эффекты. Путем варьирования параметра смещения внутреннего диска биллиарда получены примеры отталкивания хаотических и регулярных уровней. С помощью сравнения квантовых функций квазираспределения Хусими-Пуанкаре и классических сечений Пуанкаре детально изучено соответствие полученных квантовых состояний и классических орбит. Для отталкивающихся состояний построена временная динамика динамического туннелирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. BohigasO., etal. Quantum tunneling and chaotic dynamics. // Nuclear Physics A560, 1993
2. Frischat S.D., Doron E. Dynamical tunneling in mixed systems. // Physical Rev. Ser.E. – 1998. – v.57,N2.
3. Robinett R.W. Periodic orbit theory analysis of the circular disk or annular billiard: Nonclassical effects and the distribution of energy eigenvalues. // Am.J. Phys. – 1999. – v.67, N1.
4. Hentschel M., Richter K. Quantum chaos in optical systems: The annular billiard. //arXiv:physics/0210002
5. Acker A., et al. Quality factors and dynamical tunneling in annular microcavities. //arXiv:903.097
6. Backer A. Numerical aspects of eigenvalue and eigenfunction computations for chaotic quantum systems. //arXiv:nlin/0204061v1.

ПРИМЕНЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОГО МЕТОДА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ КВАЗИЭНЕРГИЙ И КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЙ

[1]*Вакульчик И.Ю.*, [*2]*Черкасский В.А.*

[1]Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина
[2]ИТФ им. А.И. Ахиезера ННЦ ХФТИ НАН Украины, Харьков, Украина

Спектральный метод решения стационарного уравнения Шредингера был предложен в работе [1] и явился привлекательной альтернативой более традиционному методу диагонализации. Спектральный метод активно использовался в ряде работ [2–5] одним из авторов (Черкасский В.А.) для получения спектров энергии и стационарных волновых функций в двумерных гамильтоновых системах достаточно сложной формы, где также предложены некоторые усовершенствования этого метода. К сожалению, несмотря на свои многочисленные преимущества, спектральный метод получил недостаточную известность, чем объясняется скудный выбор литературы по его использованию в стационарных физических задачах. Напротив, при численном анализе физических моделей с периодической внешней силой (накачкой) спектральный метод быстро доказал свои преимущества, и на сегодняшний день стандартным методом вычисления квазиэнергий является численный анализ матрицы оператора эволюции, который по существу есть комбинация спектрального метода и метода диагонализации.

В настоящей работе предлагается анализ эффективности спектрального метода для вычисления спектра квазиэнергий и квазистационарных состояний в так называемых «полутора-размерных» системах, то есть одномерных физических моделях при наличии периодической внешней силы. Представленные результаты относятся к трем типам систем.

Во-первых, рассмотрен гармонический осциллятор с периодической накачкой – это одна из немногих систем, для которой квазиэнергии и квазистационарные волновые функции известны аналитически [6,7]. На примере этой точно решаемой системы проанализированы вопросы сходимости метода и наиболее эффективные пути достижения желаемой точности результата.

Во-вторых, рассмотрен нелинейный осциллятор произвольной четной степени с периодической гармонической накачкой. Такая система представляет интерес с точки зрения классического и квантового хаоса, поскольку в определенном интервале амплитуд накачки в ней с ростом энергии движения наблюдается аномальный (тройной) переход от регулярной динамики к хаотической и обратно [8]. Ввиду отсутствия точных решений для этой модели проведено сравнение результатов, полученных спектральным методом и методом диагонализации матрицы Флоке.

Наконец, в-третьих, рассмотрен случай периодической внешней силы, приложенной к семейству потенциалов, изоспектральных гармоническому осциллятору с добавленным уровнем энергии ниже основного состояния. Такое семейство точно решаемых одномерных моделей может быть получено методами суперсимметричной квантовой механики [9–11] и представляет большой интерес с точки зрения приложений. Наличие аналитических выражений для волновых функций в отсутствие накачки в таких моделях является важным преимуществом, особенно с учетом того факта, что сама форма потенциала оказывается весьма сложной и обладает несколькими локальными минимумами. В присутствии накачки не удается найти точных решений для такой модели, так что приведены численные результаты, полученные спектральным методом, методом диагонализации матрицы Флоке, а также методом теории возмущений в пределе малых амплитуд внешней силы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Feit M.D., Fleck J.A., Steiger Jr. and A. Solution of the Schrödinger Equation by a Spectral Method // J. Comp. Phys. – 1982. – v. 47. – P.412–433.
2. Berezovoj V.P., Bolotin Yu.L., Cherkaskiy V.A. Quantum Manifestations of Classical Stochasticity in the Mixed State // Prog. Theor. Phys. Supplement. – 2003. – v.150. – P. 326–329.