$$r'' = -z'k, \ z'' = r'k,$$
$$k(r,z,z') := bz - \frac{z'}{r} - \frac{q_0}{\gamma}\ln\left(\frac{r}{\alpha}\operatorname{sh}\frac{\alpha}{r}\right) - pr^2 + c, \quad (1)$$
$$(' := d/ds; \ r'^2 + z'^2 = 1), \quad b := \pm\frac{\rho g}{\sigma},$$
$$q_0 := \pm\frac{\mu_0 M_S J}{2\pi\sigma}, \quad \alpha := \frac{\gamma J}{2\pi} \quad p = \pm\frac{\rho\omega^2}{\sigma}$$

где $\rho-$ плотность жидкости, $\sigma-$коэффициент поверхностного натяжения, $\omega-$угловая скорость вращения жидкости, M – намагниченность единицы объема жидкости, c – произвольная постоянная. Параметры b, q_0, p в (1) выбираются со знаком $+(-)$, если область, занятая намагничивающейся жидкостью, расположена справа (слева) при движении вдоль равновесной линии с возрастанием s.

В случае полного магнитного насыщения жидкости ($M = M_S = \text{const}$) в (1) следует принять

$$k(r,z,z') = bz - z'/r - q_0/r - pr^2 + c,$$

а в случае линейного намагничивания:

$$k(r,z,z') = bz - z'/r - q_1/r^2 - pr^2 + c,$$
$$q_1 := \mu_0(\mu-1)J^2/(8\pi^2\sigma)$$

Подробно изучены качественные свойства решений полученных уравнений. Показано, в частности, что семейство интегральных линий системы (1) на плоскости (r,z) при $b=0$ (условия невесомости) содержит замкнутые кривые, отвечающие кольцеобразным фигурам равновесия жидкости.

На основе принципа минимума потенциальной энергии получены условия устойчивости равновесных конфигураций намагничивающейся равномерно вращающейся жидкости, сводящиеся к проверке знака наименьшего собственного значения $\lambda_{\min}$ спектральной краевой задачи:

$$-\sigma\Delta_\Gamma\zeta + a\zeta + \eta +$$
$$+\left\{B_n\frac{\partial\psi}{\partial n} + \mu_0\mu_H(\vec{e}_H\cdot\nabla\psi)H_n^2 - \left(\vec{B}_\tau\cdot\nabla_\Gamma\psi\right)\right\}_\Gamma = \lambda\zeta;$$
$$\frac{\partial\zeta}{\partial\nu} + \kappa\zeta = 0 \ \text{ на } \partial\Gamma; \quad \int_\Gamma \zeta\, d\Gamma = 0;$$
$$\operatorname{div}\mu^{(k)}\hat{\nabla}^{(k)}\psi^{(k)} = 0 \quad \text{в } \Omega_k, \quad k=1,2,3;$$
$$\mu_0\left\{\mu\frac{\partial\psi}{\partial n} + \mu_H(\vec{e}_H\cdot\nabla\psi)H_n\right\}_\Gamma = -\left\{\operatorname{div}_\Gamma\zeta\vec{B}_\tau\right\}_\Gamma,$$
$$\{\psi\}_\Gamma = \{H_n\}_\Gamma\,\zeta \ \text{ на } \ \Gamma;$$
$$\{\psi\}_S = 0, \ \ \mu_0\left\{\mu\frac{\partial\psi}{\partial n} + \mu_H(\vec{e}_H\cdot\nabla\psi)H_n\right\}_S = 0 \ \text{ на } \ S;$$
$$\psi(\vec{x}) \to 0 \ \text{ при } |\vec{x}| \to \infty;$$
$$a := \rho\vec{n}\cdot\nabla\Phi/\sigma - (k_1^2 + k_2^2) + \left\{b^{\alpha\beta}H_\alpha B_\beta - (k_1 + k_2)H_n B_n\right\}_\Gamma,$$
$$\Phi = gz - \omega^2 r^2/2,$$
$$\kappa := (k_\Gamma\cos\alpha + k_S)/\sin\alpha, \ \ \vec{e}_H^{(k)}(\vec{x}) = \vec{H}^{(k)}(\vec{x})/H^{(k)}(\vec{x})$$

Здесь $\zeta-$ отклонения возмущенной свободной поверхности жидкости Γ, отсчитываемые по нормали $\vec{n}$ к Γ; $S-$ поверхность контакта жидкости с твердой стенкой; $\psi-$ возмущение потенциала магнитного поля (остальные обозначения см. в [1,2]). Фигурные скобки с нижним индексом Γ или S означают скачок заключенной в них величины при переходе поверхности раздела сред, указанной в качестве индекса: $\{A\}_\Gamma := \left(A^{(2)} - A^{(1)}\right)\Big|_\Gamma$.

Равновесное состояние жидкости устойчиво, если $\lambda_{\min} > 0$, и неустойчиво, если $\lambda_{\min} < 0$.

В пространстве безразмерных параметров определены области устойчивости осесимметричных равновесных форм намагничивающейся жидкости, заключенной между двумя горизонтальными пластинами и окружающей вертикальный проводник с током, между двумя коаксиальными цилиндрами, и в ряде других случаев.

ЛИТЕРАТУРА

1. Борисов И.Д. Устойчивость равновесия намагничивающейся капиллярной жидкости. // Магнитная гидродинамика. – 1983. – N2. – С.45–54.
2. BorisovI.D., YatsenkoT.Yu. Smalloscillationsofmagnetizableidealfluid. // J. Math. Physics, Analysis, Geometry. – 2010. – v.6. – N4. – P. 383 – 395.

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ В ЧИСЛЕННОМ ИССЛЕДОВАНИИ АЭРОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ В ТУРБОМАШИНАХ

Ванин В.А., Русанов А.В.

Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Наиболее широкое распространение получили методы построения конечномерных моделей для математических моделей аэрогидродинамических процессов, которые условно можно разделить на два. Методы основанные на конечноэлементном представлении решения (метод Галеркина (МГ), метод конечных элементов (МКЭ), метод конечных суперэлементов (МКСЭ)) и конечноразностные (метод конечных разностей(МКР), метод конечных объемов(МКО)). Отметим наличие между ними глубокой внутренней связи [1].

Начавшийся процесс их взаимопроникновения приводит к новым численным методам и новым теоретическим предположениям о дальнейших путях развития. В конечноразностных методах появляется реконструкция (восполнения) распределения искомых параметров в пределах расчетных ячеек, представляющая аналог координатного элемента как в методе Галеркина. Аналогично, в методе Галеркина используют координатные функции, порождающие системы алгебраических уравнений с разреженной матрицей для коэффициентов разложения, как в методе конечных разностей.

Получены удовлетворительных результатов с использованием разностных схем, имеющих второй порядок классической аппроксимации на равномерных сетках для расчета гладких течений. Дальнейшие усилия были направлены на разработку теоретических и практических приемов построения высокоточных конечно-элементных и разностных схем для течений с разрывами (ударные волны, контактные разрывы и т.д.). В последнее десятилетие получили распространение в вычислительной практике несогласованные конечные элементы, допускающие конечные разрывы на стыке двух соседних геометрических элементов. Такой подход позволяет повысить точность решения, не расширяя шаблон аппроксимации оператора задачи [2,3].

Для достижения заданной точности решения полученной дискретной задачи необходим контроль погрешностей связанных с исходными данными, аппроксимацией, конечностью разрядной сетки вычислительной техники. Часто в дискретной модели используются точные соотношения, реализуемые итерациями или их приближенным (линеаризованным) представлением. Так, в массовой операции распада произвольного разрыва, в разностной схеме Годунова используется итерационное решение или точное решение для ее акустического приближения.

В докладе представлены некоторые результаты расчета сложных турбулентных газодинамических течений в межлопаточных каналах турбомашин на основе схемы С. К. Годунова повышенного порядка точности на гладких решениях:

– течение в решетке Ходсона на расчетном и нерасчетном режимах обтекания (угол атаки – 20,3º);

– вторичные течения в межлопаточном канале турбомашины (расчет и эксперимент);

– следовые особенности в плоской трехрядной решетке. Резонансы;

– нестационарное течение в ступени турбины ГТД с охлаждаемыми лопатками;

– влияние пространственной формы лопаток на структуру трехмерноготечения (саблевидность, окружной и осевой навал лопаток).

ЛИТЕРАТУРА

1. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. Москва: Мир. – 1988. – 352с.

2. Волков А.В., Ляпунов С.В. Исследование эффективности использования численных схем высокого порядка точности для решения уравнений Навье Стокса и Рейнольдса на неструктурированных адаптивных сетках // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 2006. – т.46, №10. – С.1894 – 1907.

3. Cokburn B. Discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems // High-Order Meth. Comput. Phys. – 1999. – v.9. – P.69–224.

ТЕРМІЧНЕ ІМПУЛЬСНЕ НАВАНТАЖЕННЯ ПІВПРОСТОРУ З ВРАХУВАННЯМ МІКРОСТРУКТУРНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ В МАТЕРІАЛІ

Васильєва Л.Я., Жук Я.О.

Миколаївський національний університет, Україна
Київський національний університет, Україна

Моделювання процесів поверхневої температурної обробки для прогнозування бажаних властивостей і вибору оптимальних параметрів процесу є важливою задачею. Для аналізу особливостей напружено-деформованого стану, що виникає внаслідок теплового опромінення матеріалів, які можуть зазнавати мікроструктурних перетворень (МСП), необхідно використовувати постановку динамічної зв'язаної задачі термомеханіки, модифіковану відповідним чином [1].

В роботі використовується така постановка із залученням узагальненої узгодженої з термодинамікою необоротних процесів моделі Боднера–Партома для описання фізично нелінійної поведінки металічних матеріалів в широкому інтервалі температур. Модель ґрунтується на застосуванні термомеханічного формалізму для середовищ із внутрішніми змінними стану. Модифікація моделі з метою врахування МСП внаслідок швидкого нагріву і наступного охолодження виконана в роботі [2].

Розглядається півпростір $z > 0$, $0 < r < \infty$, на поверхні $z = 0$ якого задають граничні умови імпульсного термічного навантаження

$$q_s = \begin{cases} q_0 \sin \dfrac{\pi}{t_q} t, & t \le t_q, \\ 0, & t > t_q; \end{cases} \qquad (1)$$

де q_0 – параметр теплового навантаження, t_q – інтервал дії імпульсу.

Припускається, що від нуля відмінні лише осьова компонента переміщення u_z, причому $u_z = u_z(z,t)$, а також температура $\theta = \theta(z,t)$. З цих припущень задача для півпростору еквівалентна задачі для стержня $0 < r < R$, $z > 0$, на бічній поверхні якого реалізуються умови жорсткого гладкого контакту і теплоізоляції $u_r = 0,\ \sigma_{rz} = 0,\ \partial\theta/\partial r = 0$, $r = R,\ z > 0$ з умовами (1) на торці $z = 0$. Розрахунки проводилися для стержнів радіусом $R = 10^{-6}$ м та довжиною $L = 10^{-3}$ м, $5 \cdot 10^{-3}$ м і $5 \cdot 10^{-2}$ м. Параметри імпульсу: $q_0 = 2 \cdot 10^{11}$ кВт/м2, $t_q = 10^{-8}$ с.

Термічне навантаження на границі формує в приповерхневій зоні хвильову і квазістатичну складові процесу при заданих швидкостях навантаження. Напруження в хвилі мають низький рівень $s_i < 1$ МПа.

Еволюція характеристик теплового і напружено-деформованого стану в часі в точці $z = 0$, показана