2. Gandel Yu.V. Parametric Representations of Integral and Psevdodifferential Operators in diffraction Problems. // X Intern. Conf. on Mathem. Methods in Electromagnetic Theory. Dnipropetrovsk, Ukraine, 2004. –P. 57 – 62.
3.Gandel Yu.V. Boundary–Value Problems for the Helmholtz Equation and their Discrete Mathematical Models // J. Math. Sci.– 2010. – v.171, N1,– P. 74–88.
4. Гандель Ю.В., Кононенко А.С. Обоснование численного решения одного гиперсингулярного интегрального уравнения // Диф. уравнения. –2006. – т. 42, N9. – С. 1256 – 1262.
5.Гандель Ю.В., Мищенко В.О. Псевдодифференциальные уравнения электромагнитной дифракции на плоскопараллельной структуре и их дискретная модель // Вестник Харьковского национального университета. – 2006. –N6(733). – С. 58 – 75.
6.Гандель Ю.В., Булыгин В.С. Граничные интегральные уравнения задач дифракции на плоских экранах и их дискретные математические модели // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2010. – т. 15. – № 2. – С. 9 – 21.
7. Bulygin V.S., Nosich A.I., and Gandel Yu.V. Nystrom-Type-Method in Three-Dimensional Electromagnetic Diffraction by a Finit PEC Rotationally Simmetric Surface // IEEE Trans. AntennasandPropagation. – 2012. – v.60, N10. – P. 4710 – 4718.
8.Гандель Ю.В., Душкин В.Д. Математические модели двумерных задач дифракции: сингулярные интегральные уравнения и численные методы дискретных особенностей. Монография. – Х.: Акад. ВВ МВД Украины. – 2012. – 544 с.

БИМОДАЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА

*Гордевский В.Д., *Лемешева Н.В.*

Харьковский национальный университет
имени В.Н. Каразина, Харьков, Украина

Проблема поиска точных и приближенных, в том или ином смысле, решений нелинейного уравнения Больцмана занимает важное место среди различных направлений исследований в кинетической теории газов. Единственным точным решением, известным на данный момент для моделей твердых сфер, является максвелловское распределение (максвеллиан). Другие, не максвелловские точные решения удается найти только для отдельных моделей взаимодействия между частицами газа – максвелловских молекул и некоторых их обобщений.

Вместе с тем, очень важной и актуальной является проблема описания взаимодействия между двумя или несколькими максвелловскими потоками в разреженном газе.

Одно из возможных приближенных бимодальных решений уравнения Больцмана для модели твердых сфер представлено ниже. А именно, рассматривается неоднородная, нестационарная линейная комбинация двух максвеллианов с различными гидродинамическими параметрами, т.е. распределение $f = \phi_1 M_1 + \phi_2 M_2$, где коэффициентные функции $\varphi_i = \varphi_i(t,x), i = 1,2$ предполагаются неотрицательными и гладкими, а M_i имеют вид: $M_i = \bar{\rho}_i \cdot \left(\dfrac{\beta_i}{\pi}\right)^{3/2} \cdot e^{\beta_i (2\bar{u}_i x - v^2 + 2v(\bar{v}_i - \bar{u}_i t))}$,

где $\bar{\rho}_i = \text{const}$, $\beta_i = (2T_i)^{-1}$ – обратные температуры.

Для построения таких бимодальных распределений, которые описывают взаимодействие между двумя максвелловскими потоками из твердых сфер типа «ускорение-уплотнение», рассматривается некая норма разности *D(f)=Q(f,f)*, взятая в качестве невязки между частями уравнения Больцмана.

Найдены такие функции ϕ_i, $i = 1,2$ и такое поведение всех имеющихся параметров, при которых «смешанная невязка с весом» $\tilde{\Delta} = \sup\limits_{(t,x)\in R^4} \dfrac{1}{1+|t|} \int\limits_{R^3} |D(f) - Q(f,f)| dv$ стремится к нулю.

Теорема:*Пусть*

$$\phi_i(t,x) = \psi_i(t,x)\exp\{-\beta_i(\bar{v}_i - \bar{u}_i t)^2\}, \quad i = 1,2, \qquad (1)$$

причем выражения

$t\psi_1\psi_2 \exp\{2\beta_1 \bar{u}_1 x + 2\beta_2 \bar{u}_2 x\}$; $\dfrac{\partial \psi_i}{\partial t}\exp\{2\beta_i \bar{u}_i x\}$;

$t\psi_i \exp\{2\beta_i \bar{u}_i x\}$; $\left|\dfrac{\partial \psi_i}{\partial x}\right| \exp\{2\beta_i \bar{u}_i x\}$;

$t\left(\bar{u}_i, \dfrac{\partial \psi_i}{\partial x}\right)\exp\{2\beta_i \bar{u}_i x\}$, $i = 1,2$ *ограничены с весом* $\dfrac{1}{1+|t|}$.

Пусть, кроме этого, предположение

$$\bar{u}_i = \bar{u}_{oi}\beta_i^{-n_i}, \quad i = 1,2, \qquad (2)$$

где $\bar{u}_{oi}$ *– произвольные фиксированные векторы в* R^3*, выполняется для* $n_i \geq 1$.

Тогда справедлива оценка сверху $\tilde{\Delta} \leq \tilde{\Delta}'$*, причем существует конечный предел величины* $\tilde{\Delta}'$*. При этом для* $n_i > 1$

$$\lim_{\beta_1,\beta_2 \to +\infty} \tilde{\Delta}' = \sum_{i,j=1, i\neq j}^{2} \bar{\rho}_i \sup_{(t,x)\in R^4} \frac{1}{1+|t|} \left| \begin{matrix} \dfrac{\partial \psi_i}{\partial t} + \bar{v}_i \dfrac{\partial \psi_i}{\partial x} + \\ + \psi_1\psi_2 \pi d^2 \bar{\rho}_j \left|\bar{v}_1 - \bar{v}_2\right| \end{matrix} \right| +$$

$$+2\pi d^2 \bar{\rho}_1 \bar{\rho}_2 \left|\bar{v}_1 - \bar{v}_2\right| \sup_{(t,x)\in R^4} \frac{1}{1+|t|} (\psi_1\psi_2),$$

а при $n_i = 1$

$$\lim_{\beta_1,\beta_2 \to +\infty} \tilde{\Delta}' = \sum_{i,j=1, i\neq j}^{2} \bar{\rho}_i \sup_{(t,x)\in R^4} \frac{1}{1+|t|} \left| \mu_i(x)\left(\frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \bar{v}_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x}\right) + \right.$$

$$\left. + \psi_1\psi_2 \mu_1(x)\mu_2(x) \pi d^2 \bar{\rho}_j \left|\bar{v}_1 - \bar{v}_2\right| \right| + 2\pi d^2 \bar{\rho}_1 \bar{\rho}_2 \left|\bar{v}_1 - \bar{v}_2\right| \times$$

$$\times \sup_{(t,x)\in R^4} \frac{1}{1+|t|} (\mu_1(x)\mu_2(x)\psi_1(t,x)\psi_2(t,x)) +$$

$$+2\sum_{i=1}^{2} \bar{\rho}_i \left|(\bar{u}_{oi}, \bar{v}_i)\right| \sup_{(t,x)\in R^4} \frac{1}{1+|t|} \{\mu_i(x)\psi_i(t,x)\},$$

где $\mu_i(x) = \exp\{2\overline{u}_{oi}x\}$, $i = 1,2$.

Следствие:*Пусть в формуле (2) параметры* n_i, $i = 1,2$ *удовлетворяют неравенству* $n_i \geq 1$. *Кроме этого, пусть выполняется дополнительное условие* $\overline{u}_i \perp \overline{v}_i$, $i = 1,2$, *и сохраняется предположение (1). Представим* ψ_i *в следующем виде:* $\psi_i = C_i(x - \overline{v}_i t)$ *или* $\psi_i = C_i\left(\left[x \times \overline{v}_i\right]\right)$, $i = 1,2$, *где* $C_i \geq 0$ *– финитные гладкие функции.*

Тогда: 1) если C_1, C_2, $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$ *удовлетворяют следующим условиям* $\sup pC_1 \cap \sup pC_2 = \varnothing$ *или* $\overline{v}_1 = \overline{v}_2$, *то* $\lim\limits_{\beta_1,\beta_2 \to +\infty} \tilde{\Delta} = 0$;

2) при произвольных C_1, C_2, $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$ *имеем* $\lim\limits_{d \to 0} \lim\limits_{\beta_i \to +\infty, i=1,2} \tilde{\Delta} = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. – М.: Мир, 1978. – 495 с.
2. Gordevskyy V.D., Andriyasheva N.V. Interaction between «accelerating-packing» flows in a low-temperature gas. // Math. Phys., Anal., Geom. – 2009. – v. 5, No. 1.–P. 38–53.
3. ГордевськийВ.Д., ЛемешеваН.В. Перехіднийрежимміж течіями типу «прискорення-згущення». // Вісник ХНУ ім. В.Н. Каразіна. – 2010. – №931. – С.49–58.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА

*Гордевский В. Д., *Сазонова Е. С.*

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Харьков, Украина.

Для описания взаимодействия между потоками газа из твердых сфер используется нелинейное интегро-дифференциальное Больцмана. Единственными известными точными решениями для модели твердых сфер являются глобальные и локальные максвеллианы, характеризующее газ, находящийся в равновесии. В связи с этим возникает интерес к поиску приближенных явных решений нелинейного уравнения Больцмана, удовлетворяющих ему лишь с произвольной степенью точности.

Само уравнение Больцмана для модели твердых сфер [1–3] имеет вид:

$$D(f) = Q(f,f), \tag{1}$$

$$D(f) = \frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x}, \tag{2}$$

$$Q(f,f) = \frac{d^2}{2}\int\limits_{R^3} dv_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha\,|(v - v_1, \alpha)| \times \\ \times[f(t,v_1',x)f(t,v',x) - f(t,v_1,x)f(t,v,x)] \tag{3}$$

В работе [3] был предложен новый подход к поиску явных приближенных решений уравнения (1)–(3), а именно континуальный вид функции распределения. При этом предполагается, что массовая скорость максвеллиана принимает не фиксированные дискретные значения, а становится произвольным параметром, принимающим любые значения из R^3.

Целью данной работы является изучение поведения континуального распределения, в которое входят локальные максвеллианы частного вида, описывающие винтообразные стационарные равновесные состояния газа (или просто винты). Каждый такой максвеллиан задается формулой [4]

$$M(v,u,x) = \rho_0 e^{\beta\omega^2 r^2}\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta(v-u-[\omega\times x])^2}, \tag{4}$$

Будем рассматривать континуальное распределение следующего вида:

$$f = \int\limits_{R^3} \phi(t,x,u)M(v,u,x)du, \tag{5}$$

Предполагается, что коэффициентная функция $\phi(t,x,u)$ является неотрицательной и принадлежащей $C^1\left(R^7\right)$. Требуется найти такие функции $\phi(t,x,u)$ и такое поведение всех имеющихся параметров, чтобы интегральная невязка Δ_1, которая имеет вид

$$\Delta_1 = \int\limits_{R^1} dt \int\limits_{R^3} dx \int\limits_{R^3} |D(f) - Q(f,f)|\,dv, \tag{6}$$

стремилась при этом к нулю.

Для удобства положим:

$$\phi(t,x,u) = \psi(t,x,u)e^{-\beta\omega^2 r^2}, \quad i = 1,2, \tag{7}$$

где функции $\psi(t,x,u)$ гладкие и неотрицательные.

Теорема.*Пусть выполнены условия (4) и (7), а также*

$$\omega = \frac{\omega_0 s}{\beta^k}, \tag{8}$$

где $s > 0$ *– любая постоянная величина,* ω_0 *– произвольный фиксированный вектор. Тогда, если следующие функции принадлежат пространству* $L_1(R^7)$*:*

$$\psi,\ |u|\psi,\ \frac{\partial\psi}{\partial t},\ \frac{\partial\psi}{\partial x}, \\ u\frac{\partial\psi}{\partial x},\ \|[\omega_0 \times x]\|\psi,\ \left([\omega_0 \times x], \frac{\partial\psi}{\partial x}\right), \tag{9}$$

то определенная в соответствии с (6) величина Δ_1 *имеет смысл и существует такое* Δ_1', *что* $\Delta \leq \Delta_1'$. *Причем, если* $1/2 < k \leq 1$, *то существует конечный предел*

$$\lim_{\beta\to+\infty}\Delta_1' = \int\limits_{R^1} dt \int\limits_{R^3} dx \left[\rho\int\limits_{R^3}\left|\frac{\partial\psi}{\partial t} + u\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|du + \\ +2\pi^3 d^2\rho^2 \int\limits_{R^6} \psi(t,x,u_1)\psi(t,x,u_2)\,|u_1 - u_2|\,du_1 du_2\right]$$

Получены некоторые достаточные условия стремления невязки Δ_1 к нулю, которые оформлены в виде следствия из теоремы.

Все полученные результаты являются новыми и могут быть использованы при исследовании неравновесных состояний в газе из твердых сфер.