

диффузии вещества в нанопористых средах // Пробл. управления и информатики. – 2010. – №6. – с. 5–18.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ИЗМЕНЕНИЯ УРОВНЯ ГРУНТОВЫХ ВОД В НЕОДНОРОДНОМ СЛОЕ, КОРЕНЬ ИЗ ПРОВОДИМОСТИ КОТОРОГО УДОВЛЕТВОРЯЕТ МЕТАГАРМОНИЧЕСКОМУ УРАВНЕНИЮ¹

Дорофеева В.И.

Орловский государственный университет, Россия

Рассматривается математическое моделирование процесса оседания бугра грунтовых вод, где используется модель совместного движения двух жидкостей в постановке Лейбензона–Маскета (модель «поршневого» вытеснения). В этой модели внешняя жидкость рассматривается как фиктивная и, после построения основной системы интегрального и дифференциального уравнений, выбирается предельный случай, в котором вязкость и плотность внешней жидкости стремятся к нулю.

В работах [1,2] показано, что эволюция границы раздела жидкостей с различными вязкостями и плотностями описывается системой интегрального и дифференциального уравнения. Эта система при пренебрежении вязкостью и плотностью внешней жидкости, и при наличии дренажного устройства для откачки воды в пласте грунта принимает вид:

$$g - 2G[g, L_t] = f + 2\phi_0,$$

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial t} = \bar{V}_0 + \bar{V}[g, L_t] \text{ на } L_t, t > 0; \bar{x} = \bar{x}_0(\Theta), t = 0,$$

где $G[g, L_t](\bar{x}) = \int_{L_t} g(\bar{y}, t) \Omega(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y}$ – оператор квазипотенциала двойного слоя, ядро

$$\Omega(\bar{x}, \bar{y}) = P(\bar{y}) \frac{\partial \Phi_1(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{y}}, \Phi_1(\bar{x}, \bar{y}) – \text{ квазипотенциал}$$

стока с полным расходом, равным -1 $P(\bar{y}) = K(\bar{y})H(\bar{y})$ – проводимость слоя, $K(\bar{y})$ – проницаемость грунта, $H(\bar{y})$ – толщина слоя, $f = -2\Pi$, $\Pi = -x_2$ – потенциал силы тяжести,

$\bar{V}[g, L_t](\bar{x}) = \int_{L_t} \frac{\partial g(\bar{y}, t)}{\partial \bar{y}} \bar{V}_2(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y}$ – оператор скорости квазипотенциала двойного слоя,

$$\bar{V}_2(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{H(M)} \left(\frac{\partial \Psi_2(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x_2} \bar{e}_1 - \frac{\partial \Psi_2(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x_1} \bar{e}_2 \right) –$$

скорость вихря с полной циркуляцией, равной -1 , $\Psi_2(\bar{x}, \bar{y})$ – функция тока этого вихря, \bar{e}_1 и \bar{e}_2 – единичные орты, $V_0 = K \text{grad} \phi_0$ – скорость квазипотенциала невозмущенного течения ϕ_0 , K – проницаемость грунта. Полученная математическая

модель была протестирована на известных точных результатах [2,3]. Для численной реализации использован метод дискретных особенностей.

Рассмотрим процесс оседания бугра грунтовых вод в среде без сложных геологических включений в неоднородном слое, корень из проводимости которого удовлетворяет метагармоническому уравнению $P(\bar{x}) = e^{-2\mu x_2}$. Полагаем, что проницаемость грунта $K(\bar{x}) = e^{-2\mu x_2}$ и $H=1$. В основной системе функции $\Phi_1(\bar{x}, \bar{y})$ и $\Psi_2(\bar{x}, \bar{y})$ выбираются в виде [3]:

$$\Phi_1(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{K_0(\mu|\bar{x} - \bar{y}|)}{2\pi\sqrt{P(\bar{x})P(\bar{y})}} + \frac{K_0(\mu|\bar{x} - \bar{\bar{y}}|)}{2\pi\sqrt{P(\bar{x})P(\bar{\bar{y}})}},$$

$$\Psi_1(\bar{x}, \bar{y}) = -\frac{\sqrt{P(\bar{x})P(\bar{y})}K_0(\mu|\bar{x} - \bar{y}|)}{2\pi} + \frac{\sqrt{P(\bar{x})P(\bar{\bar{y}})}K_0(\mu|\bar{x} - \bar{\bar{y}}|)}{2\pi},$$

где $K_0(\mu|\bar{x} - \bar{y}|)$ есть модифицированная функция Бесселя 2-го рода.

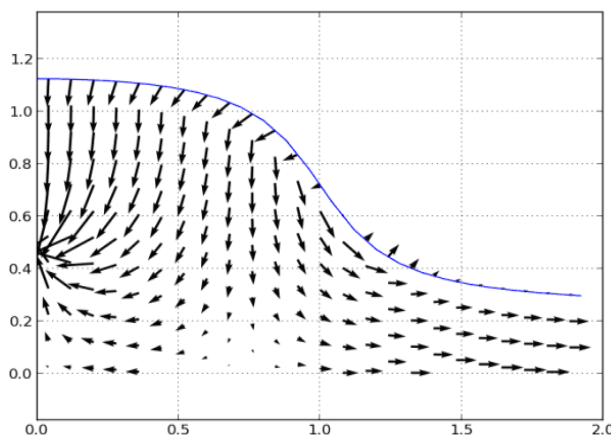


Рис.1. Поле скоростей в слое с проводимостью $P(\bar{x}) = e^{-2\mu x_2}$ при $t = 0$ и дренажном устройстве с координатами $(0; 0.5)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский Д.Н. Вычисление скорости перемещения границы раздела различных жидкостей в неоднородном слое методом дискретных вихревых пар // Математическое моделирование. – 2009. – т.21, №12. – С.122–128.
2. Никольский Д.Н., Дорофеева В.И. Математическое моделирование двумерного процесса изменения уровня грунтовых вод под действием силы тяжести методом дискретных особенностей // Вычислительные методы и программирование. – 2011. – т.12. – С.85–89.
3. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.:Наука, – 1977. – 644 с.

¹Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.В37.21.0388.