О НЕКОТОРЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ИХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЯХ

Загороднюк С. М.

ХНУ имени В.Н. Каразина, Харьков, Украина

Теория стационарных последовательностей в гильбертовом пространстве была построена А.Н. Колмогоровым, и на случай многомерных стационарных последовательностей обобщена Ю.А. Розановым. Начиная с А.Н. Колмогорова, многие математики изучали различные классы нестационарных последовательностей и кривых в гильбертовом пространстве, используя подход А.Н. Колмогорова. Здесь следует упомянуть работы М.Г. Крейна, К. Карунена, В.С. Пугачева, К. Кирчева, А.А. Янцевича, В.А. Золотарева. Автор начал заниматься изучением последовательностей, кривых и полей в гильбертовом пространстве по предложению В.А. Золотарева и, пользуясь случаем, выражает ему благодарность.

Основным объектом, который мы будем рассматривать, будет многомерная (или векторная) полиномиальная последовательность в гильбертовом пространстве. Многомерная (N-мерная) полиномиальная последовательность представляет собой (по аналогии со стационарным случаем) набор из N штук полиномиальных последовательностей, которые попарно полиномиально связаны между собой. В свою очередь, полиномиальная последовательность – это последовательность элементов гильбертова пространства H, которая допускает следующее представление:

$$x_n = p_n(A)x_0, \qquad n \in Z_+. \tag{1}$$

Здесь $\{p_n(t)\}$ – набор ортогональных многочленов на вещественной оси, а A – самосопряженный оператор в H. В отличии от стационарного случая, корреляционная функция $K_{n,m} = (x_n, x_m)_H$ (где $(\cdot,\cdot)_H$ обозначает скалярное произведение в H) для полиномиальной последовательности не является функцией разности аргументов, а удовлетворяет некоторому разностному соотношению, порожденному рекуррентным соотношением для ортогональных многочленов. Кроме того, самосопряженный оператор A в представлении (1) может быть выбран неединственным образом.

В случае многомерной полиномиальной последовательности $\vec{x}_n = \left(x_n^k\right)_{k=1}^N$, $n \in Z_+$, каждая из N последовательностей допускает представление (1). Более того, существует выбор самосопряженного оператора в представлении (1), который один и тот же для всех последовательностей:

$$x_n^r = p_n(A)x_0^r, \quad n \in Z_+, \quad 1 \le r \le N. \tag{2}$$

Функцию $K_{n,m} = \left(K_{n,m}^{r,s}\right)_{r,s=1}^N$, $n,m \in Z_+$, где $K_{n,m}^{r,s} := \left(x_n^r, x_m^s\right)_H$, будем называть матричной корреляционной функцией последовательности $\vec{x}_n$. Обозначим посредством $L_{\vec{x}}$ линейную оболочку значений последовательностей $x_n^r, 1 \le r \le N$, а $H_{\vec{x}}$ – замыкание $L_{\vec{x}}$ в H. Все самосопряженные операторы, для которых выполнено (2), совпадают на $L_{\vec{x}}$ с некоторым симметрическим оператором $A_{\vec{x}}$, который называется оператором последовательности $\vec{x}_n$. Пусть $\tilde{A}$ является некоторым самосопряженным расширением оператора $A_{\vec{x}}$ в гильбертовом пространстве $\tilde{H} \supseteq H$. Матрицу-функцию $F(\lambda) = (F_{j,k}(\lambda))_{j,k=1}^N = \left(\left(P_{H_{\vec{x}}}^{\tilde{H}} \tilde{E}_\lambda x_0^j, x_0^k\right)_H\right)_{j,k=1}^N$ называем спектральной матрицей функцией последовательности $\vec{x}_n$. Здесь $\{E_\lambda\}_{\lambda \in R}$ является непрерывным слева ортогональным разложением единицы оператора $\tilde{A}$, а $P_{H_{\vec{x}}}^{\tilde{H}}$ является ортогональным проектором в $\tilde{H}$ на $H_{\vec{x}}$. Возникает вопрос описания всех спектральных функций заданной многомерной полиномиальной последовательности. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема. Обозначим

$$\Delta_{\overline{A_{\vec{x}}}}(\lambda) = \left(\overline{A_{\vec{x}}} - \lambda E_{H_{\vec{x}}}\right) D\left(\overline{A_{\vec{x}}}\right),$$

$$N_\lambda\left(\overline{A_{\vec{x}}}\right) = H_{\vec{x}}(-)\Delta_{\overline{A_{\vec{x}}}}(\lambda), \qquad \lambda \in C \setminus R.$$

Теорема 1. *Пусть задана* N*-мерная полиномиальная последовательность* $\vec{x}_n$ *в гильбертовом пространстве* H. *Все матричные спектральные функции последовательности* $\vec{x}_n$ *находятся из следующего соотношения:*

$$\int_R \frac{1}{\lambda - z} dF_{j,k}(\lambda) = \left(\left(\left(A_{\vec{x}}\right)_{G(z)} - zE_{H_{\vec{x}}}\right)^{-1} x_0^j, x_0^k\right)_H,$$

$z \in C_+, 1 \le j,k \le N$. (3)

Здесь $G(z)$ является аналитической в C_+ операторнозначной функцией, значениями которой являются сжатия, отображающие $N_i\left(\overline{A_{\vec{x}}}\right)$ в $N_{-i}\left(\overline{A_{\vec{x}}}\right)$, а $\left(A_{\vec{x}}\right)_{G(z)}$ является квазисамосопряженным расширением $A_{\vec{x}}$, определяемым $G(z)$; $C_+ = \{z \in C : \operatorname{Im} z > 0\}$. Соответствие между всеми такими операторнозначными функциями и всеми спектральными функциями взаимно однозначно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Загороднюк С.М. О спектральных функциях полиномиальных последовательностей. / Вісник ХНУ ім. В.Н. Каразіна, сер. “Матем., прикл. матем. і механіка” . – 2010. – № 931. – С.33–48.

СЕПАРАБЕЛЬНАЯ ОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ДАУГАВЕТОВЫХ ЦЕНТРОВ

*Ивашина Т. В., Кадец В.М.

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Харьков, Украина

Банахово пространство X обладает свойством Даугавета, если любой линейный непрерывный одномерный оператор $T : X \to X$ удовлетворяет