## О НЕКОТОРЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ИХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЯХ

*Загороднюк С. М.*

ХНУ имени В.Н. Каразина, Харьков, Украина

Теория стационарных последовательностей в гильбертовом пространстве была построена А.Н. Колмогоровым, и на случай многомерных стационарных последовательностей обобщена Ю.А. Розановым. Начиная с А.Н. Колмогорова, многие математики изучали различные классы нестационарных последовательностей и кривых в гильбертовом пространстве, используя подход А.Н. Колмогорова. Здесь следует упомянуть работы М.Г. Крейна, К. Карунена, В.С. Пугачева, К. Кирчева, А.А. Янцевича, В.А. Золотарева. Автор начал заниматься изучением последовательностей, кривых и полей в гильбертовом пространстве по предложению В.А. Золотарева и, пользуясь случаем, выражает ему благодарность.

Основным объектом, который мы будем рассматривать, будет многомерная (или векторная) полиномиальная последовательность в гильбертовом пространстве. Многомерная ($N$-мерная) полиномиальная последовательность представляет собой (по аналогии со стационарным случаем) набор из $N$ штук полиномиальных последовательностей, которые попарно полиномиально связаны между собой. В свою очередь, полиномиальная последовательность – это последовательность элементов гильбертова пространства $H$, которая допускает следующее представление:

$$x_n = p_n(A)x_0, \qquad n \in Z_+. \qquad (1)$$

Здесь $\{p_n(t)\}$ – набор ортогональных многочленов на вещественной оси, а $A$ – самосопряженный оператор в $H$. В отличии от стационарного случая, корреляционная функция $K_{n,m} = (x_n, x_m)_H$ (где $(\cdot,\cdot)_H$ обозначает скалярное произведение в $H$) для полиномиальной последовательности не является функцией разности аргументов, а удовлетворяет некоторому разностному соотношению, порожденному рекуррентным соотношением для ортогональных многочленов. Кроме того, самосопряженный оператор $A$ в представлении (1) может быть выбран неединственным образом.

В случае многомерной полиномиальной последовательности $\vec{x}_n = \left(x_n^k\right)_{k=1}^N$, $n \in Z_+$, каждая из $N$ последовательностей допускает представление (1). Более того, существует выбор самосопряженного оператора в представлении (1), который один и тот же для всех последовательностей:

$$x_n^r = p_n(A)x_0^r, \quad n \in Z_+, \quad 1 \le r \le N. \qquad (2)$$

Функцию $K_{n,m} = \left(K_{n,m}^{r,s}\right)_{r,s=1}^N$, $n,m \in Z_+$, где $K_{n,m}^{r,s} := \left(x_n^r, x_m^s\right)_H$, будем называть матричной корреляционной функцией последовательности $\vec{x}_n$. Обозначим посредством $L_{\vec{x}}$ линейную оболочку значений последовательностей $x_n^r, 1 \le r \le N$, а $H_{\vec{x}}$ – замыкание $L_{\vec{x}}$ в $H$. Все самосопряженные операторы, для которых выполнено (2), совпадают на $L_{\vec{x}}$ с некоторым симметрическим оператором $A_{\vec{x}}$, который называется оператором последовательности $\vec{x}_n$. Пусть $\tilde{A}$ является некоторым самосопряженным расширением оператора $A_{\vec{x}}$ в гильбертовом пространстве $\tilde{H} \supseteq H$. Матрицу-функцию $F(\lambda) = (F_{j,k}(\lambda))_{j,k=1}^N = \left(\left(P_{H_{\vec{x}}}^{\tilde{H}} \tilde{E}_\lambda x_0^j, x_0^k\right)_H\right)_{j,k=1}^N$ называем спектральной матрицей функцией последовательности $\vec{x}_n$. Здесь $\{E_\lambda\}_{\lambda \in R}$ является непрерывным слева ортогональным разложением единицы оператора $\tilde{A}$, а $P_{H_{\vec{x}}}^{\tilde{H}}$ является ортогональным проектором в $\tilde{H}$ на $H_{\vec{x}}$. Возникает вопрос описания всех спектральных функций заданной многомерной полиномиальной последовательности. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема. Обозначим

$$\Delta_{\overline{A_{\vec{x}}}}(\lambda) = \left(\overline{A_{\vec{x}}} - \lambda E_{H_{\vec{x}}}\right) D\left(\overline{A_{\vec{x}}}\right),$$

$$N_\lambda\left(\overline{A_{\vec{x}}}\right) = H_{\vec{x}} (-) \Delta_{\overline{A_{\vec{x}}}}(\lambda), \quad \lambda \in C \setminus R.$$

**Теорема 1.** *Пусть задана* $N$ *-мерная полиномиальная последовательность* $\vec{x}_n$ *в гильбертовом пространстве* $H$. *Все матричные спектральные функции последовательности* $\vec{x}_n$ *находятся из следующего соотношения:*

$$\int_R \frac{1}{\lambda - z} dF_{j,k}(\lambda) = \left(\left(\left(A_{\vec{x}}\right)_{G(z)} - zE_{H_{\vec{x}}}\right)^{-1} x_0^j, x_0^k\right)_H,$$

$z \in C_+, 1 \le j,k \le N$. (3)

Здесь $G(z)$ является аналитической в $C_+$ операторнозначной функцией, значениями которой являются сжатия, отображающие $N_i\left(\overline{A_{\vec{x}}}\right)$ в $N_{-i}\left(\overline{A_{\vec{x}}}\right)$, а $\left(A_{\vec{x}}\right)_{G(z)}$ является квазисамосопряженным расширением $A_{\vec{x}}$, определяемым $G(z)$; $C_+ = \{z \in C : \operatorname{Im} z > 0\}$. Соответствие между всеми такими операторнозначными функциями и всеми спектральными функциями взаимно однозначно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Загороднюк С.М. О спектральных функциях полиномиальных последовательностей. / Вісник ХНУ ім. В.Н. Каразіна, сер. "Матем., прикл. матем. і механіка" . – 2010. – № 931. – С.33–48.

## СЕПАРАБЕЛЬНАЯ ОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ДАУГАВЕТОВЫХ ЦЕНТРОВ

**Ивашина Т. В., Кадец В.М.*

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Харьков, Украина

Банахово пространство $X$ обладает свойством Даугавета, если любой линейный непрерывный одномерный оператор $T : X \to X$ удовлетворяет равенству $\|Id+T\| = 1+\|T\|$, где Id – тождественный оператор на $X$ [1].

Пространства со свойством Даугавета не рефлексивны, не обладают безусловным базисом, содержат подпространства, изоморфные $\ell_1$. Классическими примерами таких пространств являются C(K), где K – компакт без изолированных точек, $L_1(\mu)$ и $L_\infty(\mu)$, где $\mu$ – безатомная мера.

В статье [1] было показано, что свойство Даугавета является сепарабельно определенным, то есть что банахово пространство X обладает свойством Даугавета тогда и только тогда, когда для любого сепарабельного подпространства $Y \subset X$ существует сепарабельное подпространство $E \subset X$, содержащее Y и обладающее свойством Даугавета.

Целью нашего исследования является обобщение понятия свойства Даугавета и полученных результатов о нём на более широкие классы банаховых пространств.

**Определение 1.** *Линейный непрерывный ненулевой оператор* $G: X \to Y$ *называется даугаветовым центром, если для любого линейного непрерывного одномерного оператора* $T: X \to Y$ *выполняется равенство* $\|G+T\| = \|G\| + \|T\|$.

Банаховы пространства, из которых действует даугаветов центр, и банаховы пространства, в которые действует даугаветов центр, не обязательно обладают свойством Даугавета, но на такие пространства легко распространяются многие факты, доказанные для пространств со свойством Даугавета.

В статье [2] мы получили аналог для даугаветовых центров теоремы о сепарабельной определённости свойства Даугавета:

**Теорема.** *Пусть X и Y – банаховы пространства. Для линейного непрерывного оператора* $G: X \to Y$ *следующие утверждения эквивалентны:*

***(i)*** *G является даугаветовым центром;*

***(ii)*** *для любых сепарабельных подпространств* $X_1 \subset X$ *и* $Y_1 \subset Y$ *существуют сепарабельные подпространства* $X_2 \subset X$ *и* $Y_1 \subset Y$ *такие, что* $X_1 \subset X_2$, $Y_1 \subset Y_2$, $G(X_2) \subset Y_2$ *и ограничение* $G|_{X_2}: X_2 \to Y_2$ *является даугаветовым центром.*

Этот результат был применён нами к изучению вопроса о том, насколько широким является множество операторов $T: X \to Y$, удовлетворяющих равенству $\|G+T\| = \|G\| + \|T\|$, где $G: X \to Y$ – даугаветов центр.

**Определение 2.** *Пусть оператор* $G: X \to Y$ *– даугаветов центр,* $\|G\| = 1$, *E – банахово пространство. Линейный непрерывный оператор* $T: X \to E$ *называется G-узким оператором, если для любого числа* $\varepsilon > 0$, *любого элемента* $x \in X$ *с* $\|x\| = 1$, *любого элемента* $y \in Y$ *с* $\|y\| = 1$ *и любого функционала* $x^* \in X^*$, $\|x^*\| = 1$ *существует элемент z из единичного шара пространства* $X$, *удовлетворяющий неравенствам* $\|T(x-z)\| + |x^*(x-z)| < \varepsilon$ *и* $\|y+Gz\| > 2-\varepsilon$.

Понятие G-узкого оператора обобщает на даугаветовы центры понятие узкого оператора [1]. Из определения G-узкого оператора легко получить, что для даугаветова центра $G: X \to Y$ любой G-узкий оператор $T: X \to Y$ удовлетворяет равенству $\|G+T\| = \|G\| + \|T\|$.

Следуя идее доказательства из статьи [3], мы показали, что для любого даугаветова центра $G: X \to Y$ множество G-узких операторов является достаточно большим: все слабо компактные операторы, операторы с сильным свойством Радона-Никодима и все операторы, не фиксирующие копии пространства $\ell_1$, действующие из X в некоторое сепарабельное пространство, являются G-узкими. В статье [2] нами было показано, что условия сепарабельности образов операторов в данном утверждении является лишним, при помощи теоремы о сепарабельной определенности даугаветовых центров и следующей леммы:

**Лемма.** *Пусть* $G: X \to Y$ *является даугаветовым центром,* $\|G\| = 1$, $T: X \to E$ *– линейный непрерывный оператор. Пусть для любой пары сепарабельных подпространств* $X_1 \subset X$ *и* $Y_1 \subset Y$ *таких, что ограничение* $G|_{X_1}: X_1 \to Y_1$ *является даугаветовым центром, ограничение оператора T на пространство* $X_1$ *является* $G|_{X_1}$*-узким оператором. Тогда T – G-узкий оператор.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Kadets V.M., Shvidkoy R.V., Werner D. Narrow operators and rich subspaces of Banach spaces with the Daugavet property // Studia Math. – 2001. – v.147. – P.269–298.

2. Ivashyna T. Daugavet centers are separably determined // Matematychni Studii. (to appear)

3. Aviles A., Kadets V., Martin M., Meri J., Shepelska V. Slicely countably determined Banach spaces // C.R. Math., Acad. Sci. Paris. – 2009. – v.347 – P.1277–1280.

## ГЕОМЕТРИЯ СРЕЗОК ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ И СВЯЗАННЫЕ С НЕЮ СВОЙСТВА БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

*Кадец В.М.*

ХНУ имени В.Н. Каразина, Харьков, Украина

*Срезкой* множества A в банаховом пространстве X называется часть, отрезаемая от A замкнутой гиперплоскостью. Целый ряд свойств банаховых пространств описывается в терминах геометрических свойств срезок выпуклых множеств в этих пространствах, и геометрия срезок накладывает отпечаток на аналитические по своей природе свойства пространства.

В этом обзорном докладе мы поговорим некоторых таких свойствах. Во-первых, мы бегло