НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ АСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Иевлев И.И.

Харьковский национальный университет
им. В.Н.Каразина, Украина

Проблема построения модели теории упругости, учитывающей действие распределенных по объему и поверхности пар сил, впервые была рассмотрена братьями Коссера [1], и затем неоднократно привлекала свое внимание других авторов [2–5]. В настоящей работе используется подход построения модели сплошной среды, предлагаемый авторами работ [6,7]. Отличие от предыдущих работа состоит в другой формулировке уравнений состояний, получаемых из законов термодинамики, а также другим представлением тензоров напряжений.

Макрочастица в асимметричной модели обладает шестью степенями свободы. В качестве обобщенных переменных можно взять координаты центра масс (x_1, x_2, x_3) макрочастицы и малые углы поворота $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$. Уравнения движения и изменения момента количества движения для такой среды имеют вид

$$\rho \ddot{u}_i = \sigma_{ki,k} + \rho X_i$$

$$\rho J \ddot{\varphi} = \mu_{ki,k} + \varepsilon_{ijk}\sigma_{jk} + \rho Y_i$$

где J – константа, связанная с моментом инерции макрочастицы, $\sigma_{ki}, \mu_{ki}, \varepsilon_{ijk}$ – обычный, моментный тензоры напряжений и тензор Леви-Чивита, X_i, Y_i – распределенные массовые силы и моменты пар сил.

Основное термодинамическое равенство для удельных величин можно представить следующим образом

$$\begin{gathered} du = Tds + \frac{\sigma}{3\rho}\delta\vartheta + \frac{\mu}{3\rho}\delta\kappa + \frac{\overset{o}{\sigma}_{ik}}{\rho}\delta\overset{o}{\varepsilon}_{ik} \\ + \frac{\overset{a}{\sigma}_{ik}}{\rho}\delta\gamma_{ik} + \frac{\overset{o}{\mu}_{ik}}{\rho}\delta\overset{o}{\kappa}_{ik} + \frac{\overset{a}{\mu}_{ik}}{\rho}\delta\overset{a}{\kappa}_{ik} \end{gathered} \qquad (1)$$

где $\vartheta = \operatorname{div}\vec{u}$ – дилатация, $\kappa = \operatorname{div}\vec{\varphi}$, $\overset{o}{\varepsilon}_{ki}$ – девиатор тензора деформаций, $\gamma_{ki} = \overset{a}{\varepsilon}_{ki} - \varepsilon_{kim}\varphi_m$ – тензор относительных углов поворота макрочастицы, $\overset{a}{\varepsilon}_{ki}$ – антисимметрическая часть тензора деформаций, $\overset{o}{\kappa}_{ki}, \overset{a}{\kappa}_{ki}$ – девиатор симметричной части и антисимметричная часть $\nabla\vec{\varphi}$, $\sigma = \sigma_{mm}, \kappa = \kappa_{mm}$, $\overset{o}{\sigma}_{ki}, \overset{o}{\mu}_{ki}, \overset{a}{\sigma}_{ki}, \overset{a}{\mu}_{ki},$ – девиаторы симметричных частей тензоров $\hat{\sigma}, \hat{\mu}$ и их антисимметрические части, соответственно. Из соотношения (1) вытекают зависимости обобщенных термодинамических сил $s, \sigma, \kappa, \overset{o}{\sigma}_{ki}, \overset{a}{\sigma}_{ki}, \overset{o}{k}_{ki}, \overset{a}{\kappa}_{ki}$ от термодинамических переменных $\theta = T - T_0, \vartheta, \kappa, \overset{o}{\varepsilon}_{ki}, \gamma_{ki}, \overset{o}{\kappa}_{ki}, \overset{a}{\kappa}_{ki}$. В случае изотропной среды эти соотношения имеют вид

$$s = \frac{c_{\varepsilon\mu}}{\rho T_0}\theta + \frac{\beta}{\rho}\vartheta + \frac{\alpha}{\rho}\kappa$$

$$\sigma = 3\left(\left(\lambda_1 + \frac{2}{3}\nu_1\right)\vartheta + \left(\lambda_{12} + \frac{2}{3}\nu_{12}\right)\kappa - \beta\theta\right)$$

$$\mu = 3\left(\left(\lambda_{12} + \frac{2}{3}\nu_{12}\right)\vartheta + \left(\lambda_2 + \frac{2}{3}\nu_2\right)\kappa - \alpha\theta\right)$$

$$\overset{o}{\sigma}_{ik} = 2\nu_1\overset{o}{\varepsilon}_{ik} + 2\nu_{12}\overset{o}{\kappa}_{ik}, \quad \overset{a}{\sigma}_{ik} = 2a_1\gamma_{ik} + 2a_2\overset{a}{\kappa}_{ik}$$

$$\overset{o}{\mu}_{ik} = 2\nu_{12}\overset{o}{\varepsilon}_{ik} + 2\nu_2\overset{o}{\kappa}_{ik}, \quad \overset{a}{\mu}_{ik} = 2a_2\gamma_{ik} + 2a_3\overset{a}{\kappa}_{ik}$$

Уравнения динамики для изотропной среды принимают следующую форму:

$$\begin{gathered} (\lambda_1 + \nu_1 - a_1)\nabla\operatorname{div}\vec{u} + (\nu_1 + a_1)\Delta\vec{u} + \\ (\lambda_{12} + \nu_{12} - a_2)\nabla\operatorname{div}\vec{\varphi} + (\nu_{12} + a_2)\Delta\vec{\varphi} + \\ +2a_1\operatorname{rot}\vec{\varphi} - \beta\nabla\theta + \rho\vec{X} = \rho\ddot{\vec{u}} \end{gathered} \qquad (2)$$

$$\begin{gathered} (\lambda_{12} + \nu_{12} - a_2)\nabla\operatorname{div}\vec{u} + (\nu_{12} + a_2)\Delta\vec{u} + \\ +(\lambda_2 + \nu_2 - a_3)\nabla\operatorname{div}\vec{\varphi} + (\nu_2 + a_3)\Delta\vec{\varphi} + 4a_2\operatorname{rot}\vec{\varphi} - \\ -4a_1\vec{\varphi} + 2a_1\operatorname{rot}\vec{u} - \alpha\nabla\theta + \rho\vec{Y} = \rho J\ddot{\vec{\varphi}} \end{gathered} \qquad (3)$$

Соответствующие соотношения в работах [1–4] следуют из (2), (3) при определенном выборе феноменологических коэффициентов.

В качестве примера рассматривается распространение плоских волн в безграничном упругом теле, аналогично работе [3]. Показано на различие результатов. Продольные волны деформаций и поворотов связаны между собой, а дисперсионное соотношение для поперечной волны имеет существенно более сложный характер.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cosserat E., Cosserat F. Theorie des Corps Deformables // Traité de Physique. Ed. O.D. Chwolson. – Paris, 1909. – P. 953–1173.
2. Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В. Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц // ФТТ. – 1960. – Т. 2. – С. 1399–1409.
3. Пальмов В.А. Основные уравнения теории несимметричной упругости. // ПММ. – 1964. – Т. 28, вып. 3. – С. 401–408.
4. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
5. Садовский В.М., Садовская О.В., Варыгина М.П. Численное моделирование пространственных волновых движений в моментных средах. // Вычислительная механика сплошных сред. – 2009. – Т. 2, № 4. – С. 111–121.
6. де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. М.: Мир. – 1964. – 456 с.
7. Дьярмати И. Неравновесная термодинамика. Теория поля и вариационные принципы. – М.: Мир. – 1974. – 304 с.