лабораторный практикум для изучения процессов взаимодействия излучения с веществом. Экономичность модели подразумевает, что затраты на моделирование должны быть в разумных пределах (для имеющихся технических ресурсов), но при этом точность получаемых результатов и общность решения задачи должны соответствовать поставленным задачам. Вычислительный эксперимент, проведенный для исследования свойств разрабатываемой математической модели, основан на методе Монте-Карло и требует значительных вычислительных ресурсов.

В результате проведенного вычислительного эксперимента были исследованы важнейшие свойства математической модели детекторного блока, которые позволили оценить зависимость отклика детекторов от координат источника излучения; на основании анализа данных вычислительного эксперимента построить функцию отклика, оценить погрешность определения направления на источник излучения.

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ФУНКЦИИ $\|x-y\|^{2-m}$

Нгуен Ван Куинь

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина

В статье рассматривается функция $h_m(x-y)=\left(\sum_{i=1}^{m}(x_i-y_i)^2\right)^{(2-m)/2}$ как отображение из пространства $\mathbb{R}_y^m$ в пространство $L_p(\mathbb{R}^m, d\gamma(x))$, где γ – некоторая положительная мера в пространстве $\mathbb{R}_x^m$.

Теорема. *Пусть* $p\geq 1$ *– произвольное фиксированное число. Пусть* γ *– положительная конечная борелевская мера такая, что*

$$\sup\left\{\int_{B(y,\delta)}|h_m(x-y)|^p\,d\gamma(x):y\in\mathbb{R}_m\right\}\to 0\quad(\delta\to 0)\quad (1)$$

Тогда функция $h_m(x-y):\mathbb{R}^m\to L_p(\gamma)$ *является равномерно непрерывной по переменной у в* $\mathbb{R}^m$.

Приведем примеры конкретных мер γ, для которых справедливо условие (1).

Пример 1. Пусть λ – мера Лебега в пространстве $\mathbb{R}^m$. Мы будем использовать стандартное обозначение $d\lambda=dx$. Рассматриваем интеграл, входящий в условие (1) и, сделав параллельный перенос и введя полярные координаты, получаем равенство:

$$J_1=\int_{B(y,\delta)}\|x-y\|^{p(2-m)}dx=\int_{B(0,\delta)}\|x\|^{p(2-m)}dx=\sigma_{m-1}\int_0^{\delta}r^{(m-1)+p(2-m)}dr,$$

где σ_{m-1} – площадь единичной сферы в пространстве $\mathbb{R}^m$. Из этого следует, что при $p\in[1,m/(m-2))$ интеграл J_1 стремится к нулю при $\delta\to 0$ равномерно относительно $y\in\mathbb{R}^m$.

Пример 2. Пусть γ – ограничение (n–1)-мерной меры Хаусдорфа на сферу $S(0,R)=\{x:\|x\|=R\}$. Имеем

$$J_2=J_2(y,\delta)=\int_{B(y,\delta)\cap S(0,R)}\|x-y\|^{p(2-m)}dS(x)\leq\int_{\sigma}\frac{dS(x)}{\|\tilde{x}\|^{p(2-m)}},$$

где $R_1=\|y\|$, $y_0=(R_1,0,...,0)$, $\tilde{x}=(x_2,...,x_m)$, $\sigma=B(y_0,\delta)\cap S(0,R)$.

Введём на сфере S(0,R) полярные координаты с r=R. Получаем неравенство

$$J_2\leq\int_0^{\arcsin 2\sqrt{\delta/R}}\frac{\sin^{m-2}\varphi_1}{\sin^{p(m-2)}\varphi_1}d\varphi_1.$$

Из этого неравенства, в свою очередь, следует, что при $p\in[1,(m-1)/(m-2))$ величина $J_2(y,\delta)$ равномерно относительно $y\in\mathbb{R}_m$ стремится к нулю при $\delta\to 0$.

Пример 3. Пусть γ – ограничение (n–1)-мерной меры Хаусдорфа на гиперплоскость $L=\{x:x_m=0\}$. Рассматриваем следующую величину

$$J_3=J_3(y,\delta)=\int_{B(y,\delta)\cap L}\|x-y\|^{p(2-m)}dS(x)..$$

Введём на L новые координаты $x=(\tilde{x}_1,...,\tilde{x}_{m-1},0)$. Тогда

$$J_3\leq\int_{B^{m-1}(y,\delta)}\left(\sum_{i=1}^{m-1}(\tilde{x}_i-y_i)^2\right)^{p(2-m)/2}d\tilde{x}_1...d\tilde{x}_{m-1}..$$

Заметим, что последний интеграл можно рассмотреть , как и в примере 1, но теперь в случае пространства $\mathbb{R}^{m-1}$. Отсюда следует, что при $p\in[1,(m-1)/(m-2))$ величина $J_3(y,\delta)$ стремится к нулю при $\delta\to 0$ равномерно относительно $y\in\mathbb{R}^m$.

АНАЛОГ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БИАНКИ В $S^3\times R^1$ И $H^3\times R^1$

Невмержицкая Е.Н., Горькавый В.А.

Харьковский национальный университет им. В.Н.Каразина, Украина.
ФТИНТ им. Б.И. Веркина НАН Украины, Харьков.

Цель работы – построение аналога преобразования Бианки для двумерных поверхностей в римановых пространствах $S^3\times R^1$ и $H^3\times R^1$.

Классическое преобразование Бианки в трехмерных пространствах постоянной кривизны строится следующим образом. Пусть F^2– псевдосферическая поверхность в трехмерном пространстве постоянной кривизны M^3. Зафиксируем семейство параллельных геодезических на F^2 и затем из каждой точки P на F^2 выпустим геодезическую Γ_P объемлющего пространства по касательной к геодезической из выбранного семейства. На этой геодезической Γ_P отложим отрезок PP^* фиксированной длины $l=l(k)$ – концы P^* откладываемых отрезков образуют новую поверхность F^* в M^3. Оказывается, что поверхность F^* тоже псевдосферическая и имеет ту же внутреннюю кривизну, что и F. Более того, построенное преобразование обладает свойствами: 1) двойное касание (откладываемые геодезические Γ_p касаются как поверхности F, так и F^*); 2) расстояние между соответствующими точками на F и F^* постоянно; 3) угол между касательными плоскостями F и F^* в соответствующих точках равен $\pi/2$.

Описанные классические конструкции и результаты были получены в работах Бианки и Бэклунда. В работах Ю.А. Аминова, K. Tenenblat – C.L. Terng, Л.А. Масальцева преобразование Бианки обобщалось на случай n-мерных псевдосферических подмногообразий в $(2n–1)$-мерном евклидовом пространстве.

Мы рассмотрели возможность построения аналогичной конструкции для двумерных псевдосферических поверхностей в римановых многообразиях – произведениях $S^3\times R^1$ и $H^3\times R^1$. Нами был выделен естественный класс *стандартных* псевдосферических поверхностей в $S^3\times R^1$ и $H^3\times R^1$, порождаемых с помощью специального процесса «вытягивания» псевдосферических поверхностей в S^3 и H^3. Доказано, что для стандартных псевдосферических поверхностей можно реализовать преобразование Бианки, при этом преобразованные поверхности тоже являются стандартными и имеют ту же внутреннюю кривизну. Более того, выполнены упомянутые выше свойства 1)–3). Также показано, что преобразование Бианки стандартных поверхностей в $S^3\times R^1$ и $H^3\times R^1$ порождается классическим преобразованием Бианки поверхностей в S^3 и H^3. Наконец, установлено, что в классе псевдосферических поверхностей в $S^3\times R^1$ и $H^3\times R^1$ конструкцию преобразования Бианки с выполнением свойств 1)–3) можно реализовать только для стандартных псевдосферических поверхностей.

Полученные результаты обобщаются на случай F^2 в $S^n\times R^1$ и $H^n\times R^1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аминов Ю.А. Геометрия подмногообразий. – К.: Наукова думка, 2002. – 468 с.
2. Tenenblat K. Transformations of Manifolds and Applications to Differential Equations – London: Addison Wesley Longman, 1998. – 209 p.

МЕТОД ИТЕРАЦИИ КАСАТЕЛЬНЫХ ДЛЯ НЕКОТОРОГО СЕМЕЙСТВА ДИОФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ

Николенко И.Г., Рыжий В.С.

Харьковский национальный университет
имени В.Н. Каразина, Харьков, Украина

Выдающийся французский математик П. Ферма (1601–1665) в кратком замечании предложил пример итерации (повторного применения) касательных в диофантовом уравнении

$$4x^3+6x^2+4x+1-y^3=0. \qquad (1)$$

Этот пример обобщает одну из задач, содержащихся в знаменитой книге "Арифметика" выдающегося древнегреческого математика Диофанта, живщего во II–III веках н. э. Диофант и Ферма при решении диофантовых уравнений искусно подбирают соответствующие алгебраические подстановки, не связывая их с проведением касательных или секущих. Геометрическая интерпретация их методов появилась позже.

Текст замечания Ферма о задаче, сводящейся к уравнению (1), приведен в [1, с. 227]. В [2, с. 220–221], [3, с. 218–219] это замечание комментируется, но рассуждения там не могли быть доведены до конца из-за ошибочного утверждения в [2, с. 220] о том, что многочлен $4x^3+6x^2+4x+1$, входящий в уравнение (1), неприводим в поле рациональных чисел. На самом же деле он имеет корень $x=-1/2$.

Для диофантовых уравнений Ферма, как и Диофант, ищет решения с положительными рациональными координатами, поскольку в то время отрицательные числа считались еще не вполне настоящими числами. Поэтому Ферма, исходя из очевидного решения (0, 1) уравнения (1) и получив на первом шаге решение (x_1,y_1) с отрицательной абсциссой, предлагает повторить «операцию» (т. е. провести касательную), исходя из точки (x_1,y_1), и утверждает, что таким образом получится решение с положительными координатами. Вычислений он не приводит.

В.С. Рыжий в работе [1] детально исследовал предложенный Ферма пример итерации касательных в диофантовом уравнении (1) с начальной точкой (0,1). Вопреки ожиданию оказалось, что на втором шаге в пересечении касательной с кривой получается решение (x_2,y_2), обе координаты которого отрицательны, оно не удовлетворяет утверждению Ферма. Но, как показано в [1], кривая (1) симметрична относительно точки $(-1/2,0)$, поэтому на втором шаге итерации касательных получаются два решения: точка (x_2,y_2) с отрицательными координатами и точка $(\tilde{x}_2,\tilde{y}_2)$ с положительными. Точка $(\tilde{x}_2,\tilde{y}_2)$ удовлетворяет уравнению Ферма. В настоящее время здесь нас устраивают рациональные решения с координатами любого знака. Метод Ферма итерации касательных для нас важен возможностью получать новые решения диофантовых уравнений по уже известным. Представляется естественным рассмотреть метод итерации касательных, выбрав для его применения достаточно широкое семейство диофантовых уравнений 3-го порядка и описываемых ими кривых.

Мы рассмотрели семейство кривых

$$F(x,y,a)\equiv a^2x^3+3ax^2+(a+2)x+1-y^3=0,\ a\in\square, \qquad (2)$$

зависящее от параметра a и содержащее кривую (1) при a = 2. Исследовано это семейство. Множество решений уравнения (2) совпадает с графиком функции

$$y=\sqrt[3]{a^2x^3+3ax^2+(a+2)x+1}\equiv f(x,a),\ a\in\square.$$