F^* тоже псевдосферическая и имеет ту же внутреннюю кривизну, что и F. Более того, построенное преобразование обладает свойствами: 1) двойное касание (откладываемые геодезические Γ_p касаются как поверхности F, так и F^*); 2) расстояние между соответствующими точками на F и F^* постоянно; 3) угол между касательными плоскостями F и F^* в соответствующих точках равен $\pi/2$.

Описанные классические конструкции и результаты были получены в работах Бианки и Бэклунда. В работах Ю.А. Аминова, K. Tenenblat – C.L. Terng, Л.А. Масальцева преобразование Бианки обобщалось на случай n-мерных псевдосферических подмногообразий в *(2n–1)*-мерном евклидовом пространстве.

Мы рассмотрели возможность построения аналогичной конструкции для двумерных псевдосферических поверхностей в римановых многообразиях – произведениях $S^3\times R^1$ и $H^3\times R^1$. Нами был выделен естественный класс *стандартных* псевдосферических поверхностей в $S^3\times R^1$ и $H^3\times R^1$, порождаемых с помощью специального процесса «вытягивания» псевдосферических поверхностей в S^3 и H^3. Доказано, что для стандартных псевдосферических поверхностей можно реализовать преобразование Бианки, при этом преобразованные поверхности тоже являются стандартными и имеют ту же внутреннюю кривизну. Более того, выполнены упомянутые выше свойства 1)–3). Также показано, что преобразование Бианки стандартных поверхностей в $S^3\times R^1$ и $H^3\times R^1$ порождается классическим преобразованием Бианки поверхностей в S^3 и H^3. Наконец, установлено, что в классе псевдосферических поверхностей в $S^3\times R^1$ и $H^3\times R^1$ конструкцию преобразования Бианки с выполнением свойств 1)–3) можно реализовать только для стандартных псевдосферических поверхностей.

Полученные результаты обобщаются на случай F^2 в $S^n\times R^1$ и $H^n\times R^1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аминов Ю.А. Геометрия подмногообразий. – К.: Наукова думка, 2002. – 468 с.
2. Tenenblat K. Transformations of Manifolds and Applications to Differential Equations – London: Addison Wesley Longman, 1998. – 209 p.

МЕТОД ИТЕРАЦИИ КАСАТЕЛЬНЫХ ДЛЯ НЕКОТОРОГО СЕМЕЙСТВА ДИОФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ

Николенко И.Г., Рыжий В.С.

Харьковский национальный университет
имени В.Н. Каразина, Харьков, Украина

Выдающийся французский математик П. Ферма (1601–1665) в кратком замечании предложил пример итерации (повторного применения) касательных в диофантовом уравнении

$$4x^3+6x^2+4x+1-y^3=0. \qquad (1)$$

Этот пример обобщает одну из задач, содержащихся в знаменитой книге "Арифметика" выдающегося древнегреческого математика Диофанта, живщего во II–III веках н. э. Диофант и Ферма при решении диофантовых уравнений искусно подбирают соответствующие алгебраические подстановки, не связывая их с проведением касательных или секущих. Геометрическая интерпретация их методов появилась позже.

Текст замечания Ферма о задаче, сводящейся к уравнению (1), приведен в [1, с. 227]. В [2, с. 220–221], [3, с. 218–219] это замечание комментируется, но рассуждения там не могли быть доведены до конца из-за ошибочного утверждения в [2, с. 220] о том, что многочлен $4x^3+6x^2+4x+1$, входящий в уравнение (1), неприводим в поле рациональных чисел. На самом же деле он имеет корень $x=-1/2$.

Для диофантовых уравнений Ферма, как и Диофант, ищет решения с положительными рациональными координатами, поскольку в то время отрицательные числа считались еще не вполне настоящими числами. Поэтому Ферма, исходя из очевидного решения (0, 1) уравнения (1) и получив на первом шаге решение (x_1,y_1) с отрицательной абсциссой, предлагает повторить «операцию» (т. е. провести касательную), исходя из точки (x_1,y_1), и утверждает, что таким образом получится решение с положительными координатами. Вычислений он не приводит.

В.С. Рыжий в работе [1] детально исследовал предложенный Ферма пример итерации касательных в диофантовом уравнении (1) с начальной точкой (0,1). Вопреки ожиданию оказалось, что на втором шаге в пересечении касательной с кривой получается решение (x_2,y_2), обе координаты которого отрицательны, оно не удовлетворяет утверждению Ферма. Но, как показано в [1], кривая (1) симметрична относительно точки $(-1/2,0)$, поэтому на втором шаге итерации касательных получаются два решения: точка (x_2,y_2) с отрицательными координатами и точка $(\tilde{x}_2,\tilde{y}_2)$ с положительными. Точка $(\tilde{x}_2,\tilde{y}_2)$ удовлетворяет уравнению Ферма. В настоящее время здесь нас устраивают рациональные решения с координатами любого знака. Метод Ферма итерации касательных для нас важен возможностью получать новые решения диофантовых уравнений по уже известным. Представляется естественным рассмотреть метод итерации касательных, выбрав для его применения достаточно широкое семейство диофантовых уравнений 3-го порядка и описываемых ими кривых.

Мы рассмотрели семейство кривых

$$F(x,y,a)\equiv a^2x^3+3ax^2+(a+2)x+1-y^3=0,\ a\in\mathbb{Q}, \qquad (2)$$

зависящее от параметра a и содержащее кривую (1) при $a = 2$. Исследовано это семейство. Множество решений уравнения (2) совпадает с графиком функции

$$y=\sqrt[3]{a^2x^3+3ax^2+(a+2)x+1}\equiv f(x,a),\ a\in\mathbb{Q}.$$

При исследовании этой функции рассматриваем ее как функцию от x при фиксированных $a \in \square$ не ограничиваясь значениями $a \in \square$.

Для любого $a \in \square$ функция $f(x,a)$ определена для любого $x \in \square$, непрерывна на $\square$, $f(-\infty,a) = -\infty$, $f(+\infty,a) = +\infty$.

Рассматриваемое семейство кривых при $a \in \square \setminus \{0\}$ состоит из всех кривых вида

$$y = \sqrt{a^2x^3 + bx^2 + cx + d}\,, \quad a \in \square \setminus \{0\},$$

удовлетворяющих двум условиям: они проходят через точку (0, 1) и симметричны относительно точки $\left(-1/a, 0\right)$.

Получены формулы для решений на первых двух шагах итерации касательных, проведен анализ условий выполнимости итерации в зависимости от параметра семейства. Приведены примеры, где указана и графическая иллюстрация.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рыжий В.С. О примере Ферма итерации касательных в диофантовом уравнении. //Universitates. – 2008. – N2. – С. 54–58.
2. Диофант. Арифметика. / Под ред. и с коммент. И.Г. Башмаковой. – М.: Наука, 1974. –328 с.
3. Башмакова И.Г., Славутин Е.И. История диофантова анализа от Диофанта до Ферма. –М.: Наука, 1984. – 266 с.
4. Ферма П. Исследования по теории чисел и диофантову анализу /Под ред. И.Г. Башмаковой. – М.: Наука, 1992. – 320 с.
5. Башмакова И.Г. Диофант и диофантовы уравнения. – М.: Наука, 1972. – 68 с.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ МНОГОСТАДИЙНОЙ ПЕРЕРАБОТКИ ПЛАТИНОИДОВ

Новаковская А.О.

Институт прикладной математики и механики Национальной академии наук Украины, Донецк

Актуальной задачей является прогнозирование явлений, происходящих в многостадийном технологическом процессе извлечения платиноидов из вторичных видов сырья. В современных условиях стоимость вторичного сырья определяется содержанием благородных металлов. Улучшение технологических и экономических показателей извлечения полезных компонент позволяет увеличить объемы закупаемого сырья за счет повышения цены закупки.

Существующие схемы извлечения платиноидов включают в себя десять различных каскадов, подчиненных разделению платины (Pt), палладия (Pd) и сопутствующих металлов (Rh, Ru, Ir) [1]. Основным процессом является растворение перечисленных компонент в растворе концентрированной соляной кислоты с подводом газообразного хлора. Математическая постановка задачи заключается в том, что для описания этого процесса необходимо разработать систему обыкновенных дифференциальных уравнений с нелинейными правыми частями. Процесс растворения металлов-спутников носит нелинейный характер, так как их растворимость возрастает после того, как растворились 50–60% платины и палладия. Процесс растворения сопровождается выделением тепла, поэтому математическая модель кроме уравнений материального баланса содержит уравнения теплового баланса. Математическая модель процесса гидрохлорирования позволяет прогнозировать ход и завершение процесса растворения металлов.

Модель гидрохлорирования представляет собой параметрическую структуру, для которой значения коэффициентов определяются с применением методов идентификации. Все последующие стадии процесса предназначены для разделения компонент. Прогноз показателей на каждой последующей стадии осуществляется с помощью динамических детерминированных моделей, содержащих уравнения материального и теплового баланса. Модель комплекса переработки состоит из подсистем прогноза показателей каждого каскада, причем выходные показатели предыдущего каскада являются начальными условиями задачи Коши последующего каскада.

Комплексное функционирование всей совокупности моделей и стадий позволяет оценивать и управлять кинетикой протекающих процессов, что позволит повысить технологическую эффективность функционирования процесса извлечения благородных металлов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стрижко Л.С. Металлургия благородных металлов. – М.: МИСиС, 2001.– 336с.

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

[*]*Олейник Е. В.*

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Харьков, Украина

В работе изучается система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, которая лежит в основе построения треугольных моделей для коммутативных систем линейных несамосопряженных ограниченных операторов $\{A_1, A_2\}$ [2] действующих в гильбертовом пространстве H

$$\begin{cases} \left[Ja(x), \gamma(x)J\right] = 0, \quad x \in [0,1], \\ \gamma'(x)J = i\left[Ja(x), \sigma_2 J\right], \quad \gamma(0) = \gamma^+, \end{cases} \tag{1}$$