в случае, когда $\dim E = 3$, $a(x), \gamma(x), \sigma_2, \gamma^+$ – самосопряженные матрицы $n \times n$, причем $a(x) \geq 0$ – такова, что $\operatorname{tr} a(x) \equiv 1$, а $J = J^* = J^{-1}$.

Данная система возникает при продолжении условия сплетаемости вдоль цепочки инвариантных подпространств для характеристической функции коммутативного узла из двух операторов [2]. Участвующая здесь матрица-функция $a(x)$ является спектральной плотностью из мультипликативного представления Потапова для характеристической функции [3]. Ранее была рассмотрена система типа Лакса, которая является частным случаем системы (1) при $J = I$ и $n = 3$, что соответствует случаю, когда оператор A_1 – диссипативный, вольтерров и имеет n-мерную мнимую компоненту.

Лемма 1. *Пусть* $\sigma_2 = \operatorname{diag}(b_1 I_{n_1}, ..., b_r I_{n_r}$ *;* $n_1 + ... + n_r = n$, $\gamma^+ = (\gamma^+_{jk})^r_{j,k=1}$, $\gamma^+_{jk} \in C^{n_j \times n_k}$, $j,k \in \{1,...,r\}$. *Пусть далее пара* $\{a(x), \gamma(x)\}$ *удовлетворяет системе (1), причем* $\gamma(x) = (\gamma_{jk}(x))^r_{j,k=1}$, $\gamma_{jk}(x) \in C^{n_j \times n_k}$, $j,k \in \{1,...,r\}$. *Тогда* $\gamma_{jj}(x) = \gamma^+_{jj}$, $x \in [0,1]$, $j \in \{1,...,r\}$.

Лемма 2. *Пусть при каждом* $x \in [0,1]$ *матрица-функция* $Ja(x)$ *имеет простой спектр и* $\{h_k(x)\}_1^n$ *– базис соответствующих собственных векторов. Тогда вектора* $\gamma(x) J h_k(x)$ *также являются ее собственными векторами, причем* $\gamma(x) J h_k(x) = \xi_k(x) h_k(x)$, *где* $\xi_k(x) \in C$. *Если* $\xi_k(x) \in R$ *, то они от x не зависят.*

Лемма 3. *Пусть* $\xi_k(x) \in C$ *– собственные значения оператора* $\gamma(x) J$, *тогда* $\xi_k(x)$ *допускают представление* $\xi_k(x) = v^k \left(2 \int_0^x n^k(t) dt + i \right)$, *где* $\langle J(h'_k(x), h_k(x) \rangle = i n^k(x)$, *а* $n^k(x), v^k \in R$, *причем* v^k *от x не зависят.*

Теорема 1. *Пусть* $\mu_k(x) \in C$ *– собственные значения матрицы* $Ja(x)$, *а* $\{h_k(x)\}_1^n$ *соответствующий базис собственных векторов, причем* $\mu_k(x) \neq \overline{\mu_s}(x)$ $(k \neq s)$. *Если* $\xi_k(x) \in C$ *– собственные значения оператора* $\gamma(x) J$, *тогда справедливо соотношение*

$$h_k{}'(x) = i \sum_{s \neq k} \alpha_{sk}(x) \frac{\mu_s(x) - \mu_k(x)}{\xi_k(x) - \overline{\xi_s}(x)} h_s(x), \; x \in [0,1]. \quad (2)$$

Получены конкретные решения (2) при дополнительных условиях в различных вариантах действия оператора $\sigma_2 J$ на базисные вектора $\{h_k(x)\}_1^3$.

Итак, для случая $n = 3$, $J \neq I$, и простого спектра гладкой матрицы $Ja(x)$ показано, что можно найти собственные вектора матрицы $Ja(x)$ при известных собственных значениях матриц $Ja(x)$, $\gamma(x)$ и действии σ_2 в базисе этих собственных векторов, а это позволяет представить явный вид решений изучаемой системы уравнений. В дальнейшем предполагается использовать результат на случай $n > 3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Золотарев В. А. Временные конусы и функциональная модель на римановой поверхности // Мат. сб. – 1990. – т.181, № 7. – С. 965–994.
2. Золотарев В.А. Аналитические методы спектральных представлений несамосопряженных и неунитарных операторов. – Харьков: ХНУ, 2003. – 342 с.
3. Лившиц М.С., Янцевич А.А. Теория операторных узлов гильбертовых пространствах. – Харьков: Изд-во. Харьк. ун-та, 1971. – 160 с.
4. Олейник Е.В. Решение нелинейных уравнений специального вида // Вестник ХНУ. Сер. «Математика, прикладная математика и механика». – 2012, № 1018. – с. 62–75.
5. Золотарев В.А. Спектральный анализ несамосопряженных коммутативных систем операторов и нелинейные дифференциальные уравнения // Теория функций и функцион. анализ, и их приложения. Респ. Сб. Харьков. – 1983. – Вып. 40. – С. 68–71.
6. Като Т. Теория возмущений линейных операторов, М.: Мир, 1972. – 740 с.
7. Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма–Лиувилля, М.: Наука, 1984. – 240с.

РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЕ СЧЁТА В ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ МДО ДИФРАКЦИИ ВОЛН Е-ТИПА НА ПРОВОДЯЩИХ ЭКРАНАХ

Паточкин Б.В., Мищенко В.О.

Харьковский национальный университет
имени В. Н. Каразина, Украина.

Исследуется скорость вычислений на компьютере при решении задачи дифракции Е-поляризованной волны на идеально проводящих цилиндрических экранах по методу дискретных токов Ю. В. Ганделя [1]. Цель – обеспечить предсказание времени счёта в стандартной и параллельной реализациях.

Пусть падающее поле – плоская волна Е-типа, а рассеиватель – система идеально проводящих цилиндрических экранов, представленных контурами: $C = \bigcup_{n=0}^{N-1} C_n$ с параметризациями $C_n : [-1;1] \to R^2$ Зависимость от времени задается множителем $e^{i\omega t}$. Полное поле $\vec{E}^{tot} = \vec{E} + \vec{E}_0$, $\vec{H}^{tot} = \vec{H} + \vec{H}_0$, где $\vec{E}_0, \vec{H}_0$ – падающее поле, $\vec{E}, \vec{H}$ – рассеянное, причем $H_0 = \left(\frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial U_0}{\partial y}, \frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial U_0}{\partial x}, 0 \right)$, $E_0 = (0, 0, U_0)$, следовательно, $E^{tot} = (0, 0, U^{tot})$,

$U^{tot}(X) = U(X) + U_0(X)$. Скалярное поле U удовлетворяет краевой задаче

$$\Delta U(X) + k^2 U(X) = 0,\ X \in R^2/\overline{C},\ X = (x, y), \quad (1)$$

$$U(X)\big|_c = -U_0(X)\big|_c, \quad (2)$$

На бесконечности заданы условия излучения Зоммерфельда, а на ребрах (концах контуров) – условия локальной конечности энергии.

Согласно подходу [1], используя достаточно гладкие параметризации контуров, представляем решение в виде потенциала простого слоя

$$U(Y) = \int_C \mu(X) H_0^{(2)}\left(k|X - Y|\right) dl_X,\ X, Y = (x, y) \in C. \quad (3)$$

Получается система интегральных уравнений вида

$$\frac{-2i}{\pi}\int_{-1}^{1} \ln|\tau - t| \frac{u^{(m)}(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt + \sum_{n=0}^{N-1}\int_{-1}^{1} \frac{u^{(n)}(t)}{\sqrt{1-t^2}} K^{(m,n)}(\tau, t) dt = f^{(m)}(\tau) \quad (4)$$

где

$$K^{(m,n)}(\tau,t) = \begin{cases} H_0^{(2)}\left(k\sqrt{\left(x^{(n)}(t) - x^{(m)}(\tau)\right)^2 + \left(y^{(n)}(t) - y^{(m)}(\tau)\right)^2}\right), \text{if } m \neq n \\ H_0^{(2)}\left(k\sqrt{\left(x^{(n)}(t) - x^{(m)}(\tau)\right)^2 + \left(y^{(n)}(t) - y^{(m)}(\tau)\right)^2}\right) + \frac{2i}{\pi}\ln|\tau - t|, \text{if } m = n \end{cases} \quad (5)$$

Используя дискретную модель этой системы, основанную на базисах из полиномов Чебышева, в которой узлами квадратурных формул и одновременно точками коллокации являются корни полиномов Чебышева [1,2], получаем СЛАУ вида $AX = B$ размерности $Z = \sum_{n=0}^{N-1} z_n$, где z_n – количество точек дискретизации на C_n.

Определим стандартное минимальное численное решение (СМЧР) дифракционной задачи как нахождение «дискретных токов» из дискретной модели уравнения (4) (решение СЛАУ) и по нему – поля в дальней зоне (диаграммы направленности по напряженности поля с шагом 1°). СМЧР делает осмысленным сравнение счета на основе разных методов. Результаты такого сравнения непосредственной программной реализации метода дискретных токов с его параллельной реализацией, основанной на методе [3], приведены в табл. 1.

В проведенных вычислительные экспериментах: $N = 9$, $z_1 = z_2 = ... = z_9$, процессор core i5- 2430, 2.4 GHz (2 ядра, hyper threading отключен).

Табл. 1. Время T получения СМЧР в непосредственной реализации и Θ – в параллельной реализации (в зависимости от размерности дискретной модели Z)

Z	225	450	900	1800	3600
T	0.269	1.970	15.48	150.6	983.8
Θ	0.135	0.986	7.74	75.1	492.1

Из табл.1 видно, что для 2-х ядерного процессора, ускорение в нашей параллельной реализации алгоритма по сравнению с непосредственной реализацией равно 1,99±0,1. Этот факт в свете результатов [3] порождает гипотезу о том, что в этой параллельной реализации методов дискретных токов ускорение пропорционально числу ядер процессора. Сейчас эта гипотеза проверяется.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гандель Ю.В., Еременко С.В., Полянская Т.С. Математические вопросы метода дискретных токов. Обоснование численного метода дискретных особенностей решения двумерных задач дифракции электромагнитных волн. Учеб.пос.. Харьков: Ротапринт ХГУ, 1992. – 145с

2. Гандель Ю.В. Введение в методы вычислений сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Харьков, 2001. – 92 с.

3. Паточкін Б.В., Мищенко В.О. Оптимизация компактной схемы Гаусса для многоядерных процессоров //Вестник ХНУ. – 2011 – N 18(981). – С. 70–81.

СЛАБЫЕ ПОДОБИЯ ПОЛУМЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Петров Е.А., Довгошей А.А.

ИПММ НАН Украины, Донецк, Украина

Пусть X — некоторое множество. **Полуметрикой** на множестве X называется функция $d : X \times X \to R^+$, $R^+ = [0, +\infty)$, такая, что $d(x, y) = d(y, x)$ и $(d(x, y) = 0) \Leftrightarrow (x = y)$ для всех $x, y \in X$. Пара (X, d), где d является полуметрикой на X, называется **полуметричеким пространством** (см., например, [1, стр. 7]).

Будем обозначать через через **SM**, **M** и **UM** классы непустых полуметрических пространств, непустых метрических пространств и, соответственно, непустых ультраметрических пространств. Спектром S_X полуметрического пространства (X, d) называется множество

$$S_X := \{d(x, y) : x, y \in X\}.$$

Пусть (X, d_X) и (Y, d_Y) — полуметрические пространства. Отображение $\Phi : X \to Y$ называется **подобием**, если Φ — биективно и существует положительное число $r = r(\Phi)$, коэффициент Φ, такое, что

$$d_Y(\Phi(x), \Phi(y)) = r d_X(x, y)$$

для всех $x, y \in X$ (см. [2, стр. 45]).

В [3] введено определение слабого подобия полуметрических пространств и получены следующие результаты.

Определение 1. *Пусть* (X, d_X), $(Y, d_Y) \in$ ***SM***. *Сюрьективное отображение* $\Phi : X \to Y$ *называется слабым подобием, если существует строго возрастающая функция* $f : S_Y \to S_X$ *такая, что равенство*