$U^{tot}(X) = U(X) + U_0(X)$. Скалярное поле *U* удовлетворяет краевой задаче

$$\Delta U(X) + k^2 U(X) = 0,\ X \in R^2/\overline{C},\ X = (x, y), \quad (1)$$

$$U(X)\big|_c = -U_0(X)\big|_c, \quad (2)$$

На бесконечности заданы условия излучения Зоммерфельда, а на ребрах (концах контуров) – условия локальной конечности энергии.

Согласно подходу [1], используя достаточно гладкие параметризации контуров, представляем решение в виде потенциала простого слоя

$$U(Y) = \int_C \mu(X) H_0^{(2)}\left(k\left|X - Y\right|\right) dl_X,\ X, Y = (x, y) \in C. \quad (3)$$

Получается система интегральных уравнений вида

$$\frac{-2i}{\pi}\int_{-1}^{1} \ln\left|\tau - t\right| \frac{u^{(m)}(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt + \sum_{n=0}^{N-1}\int_{-1}^{1}\frac{u^{(n)}(t)}{\sqrt{1-t^2}}K^{(m,n)}(\tau, t)dt = f^{(m)}(\tau) \quad (4)$$

где

$$K^{(m,n)}(\tau,t) = \begin{cases} H_0^{(2)}\left(k\sqrt{\left(x^{(n)}(t)-x^{(m)}(\tau)\right)^2 + \left(y^{(n)}(t)-y^{(m)}(\tau)\right)^2}\right), \text{if } m \neq n \\ H_0^{(2)}\left(k\sqrt{\left(x^{(n)}(t)-x^{(m)}(\tau)\right)^2 + \left(y^{(n)}(t)-y^{(m)}(\tau)\right)^2}\right) + \frac{2i}{\pi}\ln\left|\tau - t\right|, \text{if } m = n \end{cases} \quad (5)$$

Используя дискретную модель этой системы, основанную на базисах из полиномов Чебышева, в которой узлами квадратурных формул и одновременно точками коллокации являются корни полиномов Чебышева [1,2], получаем СЛАУ вида $AX = B$ размерности $Z = \sum_{n=0}^{N-1} z_n$, где z_n – количество точек дискретизации на C_n.

Определим стандартное минимальное численное решение (СМЧР) дифракционной задачи как нахождение «дискретных токов» из дискретной модели уравнения (4) (решение СЛАУ) и по нему – поля в дальней зоне (диаграммы направленности по напряженности поля с шагом 1º). СМЧР делает осмысленным сравнение счета на основе разных методов. Результаты такого сравнения непосредственной программной реализации метода дискретных токов с его параллельной реализацией, основанной на методе [3], приведены в табл. 1.

В проведенных вычислительные экспериментах: $N = 9$, $z_1 = z_2 = ... = z_9$, процессор core i5- 2430, 2.4 GHz (2 ядра, hyper threading отключен).

Табл. 1. Время T получения СМЧР в непосредственной реализации и Θ – в параллельной реализации (в зависимости от размерности дискретной модели Z)

Z	225	450	900	1800	3600
T	0.269	1.970	15.48	150.6	983.8
Θ	0.135	0.986	7.74	75.1	492.1

Из табл.1 видно, что для 2-х ядерного процессора, ускорение в нашей параллельной реализации алгоритма по сравнению с непосредственной реализацией равно 1,99±0,1. Этот факт в свете результатов [3] порождает гипотезу о том, что в этой параллельной реализации методов дискретных токов ускорение пропорционально числу ядер процессора. Сейчас эта гипотеза проверяется.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гандель Ю.В., Еременко С.В., Полянская Т.С. Математические вопросы метода дискретных токов. Обоснование численного метода дискретных особенностей решения двумерных задач дифракции электромагнитных волн. Учеб.пос.. Харьков: Ротапринт ХГУ, 1992. – 145с

2. Гандель Ю.В. Введение в методы вычислений сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Харьков, 2001. – 92 с.

3. Паточкін Б.В., Мищенко В.О. Оптимизация компактной схемы Гаусса для многоядерных процессоров //Вестник ХНУ. – 2011 – N 18(981). – С. 70–81.

СЛАБЫЕ ПОДОБИЯ ПОЛУМЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

**Петров Е.А., Довгошей А.А.*

ИПММ НАН Украины, Донецк, Украина

Пусть X — некоторое множество. **Полуметрикой** на множестве X называется функция $d : X \times X \to R^+$, $R^+ = [0, +\infty)$, такая, что $d(x, y) = d(y, x)$ и $(d(x, y) = 0) \Leftrightarrow (x = y)$ для всех $x, y \in X$. Пара (X, d), где d является полуметрикой на X, называется **полуметричеким пространством** (см., например, [1, стр. 7]).

Будем обозначать через через **SM**, **M** и **UM** классы непустых полуметрических пространств, непустых метрических пространств и, соответственно, непустых ультраметрических пространств. Спектром S_X полуметрического пространства (X, d) называется множество

$$S_X := \{d(x, y) : x, y \in X\}.$$

Пусть (X, d_X) и (Y, d_Y) — полуметрические пространства. Отображение $\Phi : X \to Y$ называется **подобием**, если Φ — биективно и существует положительное число $r = r(\Phi)$, коэффициент Φ, такое, что

$$d_Y(\Phi(x), \Phi(y)) = r d_X(x, y)$$

для всех $x, y \in X$ (см. [2, стр. 45]).

В [3] введено определение слабого подобия полуметрических пространств и получены следующие результаты.

Определение 1. *Пусть* (X, d_X), $(Y, d_Y) \in$ ***SM***. *Сюрьективное отображение* $\Phi : X \to Y$ *называется слабым подобием, если существует строго возрастающая функция* $f : S_Y \to S_X$ *такая, что равенство*

$$d_X(x,y) = f\left(d_Y(\Phi(x),\Phi(y))\right)$$

выполнено для всех $x, y \in X$.

Если $\Phi: X \to Y$ — слабое подобие, то мы пишем $X \overset{w}{\longleftrightarrow} Y$ и говорим, что X и Y являются слабо подобными.

Предложение 1. *Отношение* $X \overset{w}{\longleftrightarrow} Y$ *является эквивалентностью на классе* ***SM***.

Предложение 2. *Пусть* $X \in \boldsymbol{UM}$. *Тогда отношение* $X \overset{w}{\longleftrightarrow} Y$ *влечет принадлежность* $Y \in \boldsymbol{UM}$ *для всех* $Y \in \boldsymbol{SM}$.

Обозначим через $\mathrm{ac}A$ множество всех точек накопления множества $A \subseteq R^+$.

Предложение 3. *Пусть* (X, d_X), $(Y, d_Y) \in M$ *и пусть* $X \overset{w}{\longleftrightarrow} Y$. *Предположим, что выполнена эквивалентность*

$$(0 \in \mathrm{ac}S_X) \Leftrightarrow (0 \in \mathrm{ac}S_Y).$$

Тогда пространства X *и* Y *гомеоморфны и каждое слабое подобие* $\Phi: X \to Y$ *является гомеоморфизмом.*

Лемма 1. Пусть (X, d_X), $(Y, d_Y) \in \mathbf{SM}$ и пусть $r > 0$. Если $X \overset{w}{\longleftrightarrow} Y$ с реализацией (f, Φ), тогда следующие условия эквивалентны:

(i) Отображение $\Phi: X \to Y$ является подобием коэффициентом r.

(ii) Функция $f: S_Y \to S_X$ удовлетворяет равенству $f(t) = \frac{1}{r} t$ для всех $t \in S_Y$.

Следствие 1. *Пусть* (X, d_X), $(Y, d_Y) \in \boldsymbol{SM}$ *и пусть* $\Phi: X \to Y$ *— слабое подобие с масштабирующей функцией* f. *Тогда* Φ *является изометрией тогда и только тогда, когда* $f(t) = t$ *для всех* $t \in S_Y$.

Частично упорядоченное множество P называется **жестким** если существует одна и только одна сохраняющая порядок биекция $F: P \to P$.

Следствие 2. *Пусть* X, $Y \in$ ***SM*** *и пусть* $S = S_X = S_Y$. *Если множество* S *жестко и* $X \overset{w}{\longleftrightarrow} Y$ *с реализацией* (f, Φ), *то слабое подобие* $\Phi: X \to Y$ *является изометрией.*

Теорема 1. *Пусть* $(X, d_X) \in \boldsymbol{UM}$ *и* $(Y, d_Y) \in \boldsymbol{SM}$. *Если* $X \overset{w}{\longleftrightarrow} Y$, $S_X = S_Y$ *и* X *компактно, то* X *и* Y *изометричны*.

Диаметром метрического пространства X называется величина

$$\mathrm{diam}X := \sup\{d(x,y): x, y \in X\}.$$

Теорема 2. *Пусть* (X, d_X) *и* (Y, d_Y) *– геодезические метрические пространства и пусть* $\Phi: X \to Y$ *— слабое подобие. Тогда* Φ *является подобием и, если* X *и* Y *ограничены,* $0 < \mathrm{diam}X \wedge \mathrm{diam}Y$, *то коэффициент подобия* $r(\Phi)$ *равен* $\mathrm{diam}Y / \mathrm{diam}X$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Leonard M. Blumenthal. Theory and applications of distance geometry. Oxford, at the Clarendon Press. – 1953. – 347 p.

2. EdgarG. Measure, topology, and fractal geometry. Undergraduate Texts in Mathematics. 2-nd edition. Springer, N.-Y. – 2008. – 268 p.

3. Dovgoshey O., Petrov E. Weak similarities of metric and semimetric spaces. // arXiv:1209.1820.

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ МНОГОМЕРНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЖОНСОНА МЕТОДОМ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ

Приходько С. Б.

Национальный университет кораблестроения им. адмирала Макарова, Николаев, Украина

Многомерное преобразование Джонсона применяется для нормализации и построения различных математических моделей [1], в том числе и нелинейных стохастических дифференциальных систем (СДС) [2, 3]. Это преобразование записывается как [1]

$$\mathbf{z} = \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\eta}\mathbf{h}\left[\boldsymbol{\lambda}^{-1}\left(\mathbf{x} - \boldsymbol{\phi}\right)\right], \tag{1}$$

где $\mathbf{z}$ – вектор нормализованных случайных величин, $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_m)^T$; $\mathbf{h}\left[(y_1, y_2, \ldots, y_m)^T\right] = \left\{h_1(y_1), h_2(y_2), \ldots, h_m(y_m)\right\}^T$; $h_k(\cdot)$ – функция одномерного преобразования Джонсона для k-ой компоненты,

$$h_k = \begin{cases} \ln y_k, & x_k > \phi, \quad \text{для семейства } S_L; \\ \ln\left[y_k/(1-y_k)\right], & \phi < x_k < \phi + \lambda, \quad \text{для семейства } S_B; \\ \mathrm{Arsh}(y_k), & -\infty \le x_k \le +\infty, \quad \text{для семейства } S_U, \end{cases}$$

$k \in [1, m]$; $y_k = (x_k - \phi_k)/\lambda_k$; $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\phi}$ и $\boldsymbol{\lambda}$ – параметры преобразования (1), $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m)^T$, $\boldsymbol{\eta} = \mathrm{diag}(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m)$, $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m)^T$, $\boldsymbol{\lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$; $\mathbf{x}$ – вектор нормализуемых случайных величин, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)^T$.

Отметим, что $\mathbf{z}$ имеет многомерное распределение Гаусса с нулевым вектором математического ожидания $\mathbf{m}_z$ и ковариационной матрицей $\boldsymbol{\Sigma}$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} D_{z_1} & \mu_{z_{12}} & \cdots & \mu_{z_{1m}} \\ \mu_{z_{21}} & D_{z_2} & \cdots & \mu_{z_{2m}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_{z_{m1}} & \mu_{z_{m2}} & \cdots & D_{z_k} \end{pmatrix},$$

где $\mu_{z_{kl}} = M\left\{\left(z_k - m_{z_k}\right)\left(z_l - m_{z_l}\right)\right\}$, $k \in [1, m]$, $l \in [1, m]$; $M\{\cdot\}$ – операция математического ожидания; $m_{z_k} = M\{z_k\}$; $D_{z_k} = M\left\{\left(z_k - m_{z_k}\right)^2\right\}$.

На сегодня неизвестны работы, в которых рассматривалось решение задачи оценки параметров многомерного преобразования Джонсона для m-мерного случая. Решения этой задачи получены лишь для двумерного и трехмерного преобразований