$$d_X(x,y) = f\left(d_Y(\Phi(x),\Phi(y))\right)$$
выполнено для всех $x, y \in X$.

Если $\Phi: X \to Y$ — слабое подобие, то мы пишем $X \xleftrightarrow{w} Y$ и говорим, что X и Y являются слабо подобными.

Предложение 1. *Отношение* $X \xleftrightarrow{w} Y$ *является эквивалентностью на классе **SM**.*

Предложение 2. *Пусть* $X \in \boldsymbol{UM}$. *Тогда отношение* $X \xleftrightarrow{w} Y$ *влечет принадлежность* $Y \in \boldsymbol{UM}$ *для всех* $Y \in \boldsymbol{SM}$.

Обозначим через $\mathrm{ac}A$ множество всех точек накопления множества $A \subseteq R^+$.

Предложение 3. *Пусть* (X, d_X), $(Y, d_Y) \in M$ *и пусть* $X \xleftrightarrow{w} Y$. *Предположим, что выполнена эквивалентность*

$$(0 \in \mathrm{ac}S_X) \Leftrightarrow (0 \in \mathrm{ac}S_Y).$$

Тогда пространства X *и* Y *гомеоморфны и каждое слабое подобие* $\Phi: X \to Y$ *является гомеоморфизмом.*

Лемма 1. Пусть (X, d_X), $(Y, d_Y) \in \mathbf{SM}$ и пусть $r > 0$. Если $X \xleftrightarrow{w} Y$ с реализацией (f, Φ), тогда следующие условия эквивалентны:

(i) Отображение $\Phi: X \to Y$ является подобием коэффициентом r.

(ii) Функция $f: S_Y \to S_X$ удовлетворяет равенству $f(t) = \frac{1}{r} t$ для всех $t \in S_Y$.

Следствие 1. *Пусть* (X, d_X), $(Y, d_Y) \in \boldsymbol{SM}$ *и пусть* $\Phi: X \to Y$ — *слабое подобие с масштабирующей функцией* f. *Тогда* Φ *является изометрией тогда и только тогда, когда* $f(t) = t$ *для всех* $t \in S_Y$.

Частично упорядоченное множество P называется **жестким** если существует одна и только одна сохраняющая порядок биекция $F: P \to P$.

Следствие 2. *Пусть* X, $Y \in$ ***SM*** *и пусть* $S = S_X = S_Y$. *Если множество* S *жестко и* $X \xleftrightarrow{w} Y$ *с реализацией* (f, Φ), *то слабое подобие* $\Phi: X \to Y$ *является изометрией.*

Теорема 1. *Пусть* $(X, d_X) \in \boldsymbol{UM}$ *и* $(Y, d_Y) \in \boldsymbol{SM}$. *Если* $X \xleftrightarrow{w} Y$, $S_X = S_Y$ *и* X *компактно, то* X *и* Y *изометричны*.

Диаметром метрического пространства X называется величина

$$\mathrm{diam}X := \sup\{d(x,y): x, y \in X\}.$$

Теорема 2. *Пусть* (X, d_X) *и* (Y, d_Y) – *геодезические метрические пространства и пусть* $\Phi: X \to Y$ — *слабое подобие. Тогда* Φ *является подобием и, если* X *и* Y *ограничены,* $0 < \mathrm{diam}X \wedge \mathrm{diam}Y$, *то коэффициент подобия* $r(\Phi)$ *равен* $\mathrm{diam}Y / \mathrm{diam}X$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Leonard M. Blumenthal. Theory and applications of distance geometry. Oxford, at the Clarendon Press. – 1953. – 347 p.
2. EdgarG. Measure, topology, and fractal geometry. Undergraduate Texts in Mathematics. 2-nd edition. Springer, N.-Y. – 2008. – 268 p.
3. Dovgoshey O., Petrov E. Weak similarities of metric and semimetric spaces. // arXiv:1209.1820.

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ МНОГОМЕРНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЖОНСОНА МЕТОДОМ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ

Приходько С. Б.

Национальный университет кораблестроения
им. адмирала Макарова, Николаев, Украина

Многомерное преобразование Джонсона применяется для нормализации и построения различных математических моделей [1], в том числе и нелинейных стохастических дифференциальных систем (СДС) [2, 3]. Это преобразование записывается как [1]

$$\mathbf{z} = \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\eta}\mathbf{h}\left[\boldsymbol{\lambda}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\phi})\right], \tag{1}$$

где $\mathbf{z}$ – вектор нормализованных случайных величин, $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_m)^T$; $\mathbf{h}\left[(y_1, y_2, \ldots, y_m)^T\right] = \{h_1(y_1), h_2(y_2), \ldots, h_m(y_m)\}^T$; $h_k(\cdot)$ – функция одномерного преобразования Джонсона для k-ой компоненты,

$$h_k = \begin{cases} \ln y_k, & x_k > \phi, \quad \text{для семейства } S_L; \\ \ln\left[y_k/(1-y_k)\right], & \phi < x_k < \phi + \lambda, \quad \text{для семейства } S_B; \\ \mathrm{Arsh}(y_k), & -\infty \le x_k \le +\infty, \quad \text{для семейства } S_U, \end{cases}$$

$k \in [1, m]$; $y_k = (x_k - \phi_k)/\lambda_k$; $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\phi}$ и $\boldsymbol{\lambda}$ – параметры преобразования (1), $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m)^T$, $\boldsymbol{\eta} = \mathrm{diag}(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m)$, $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m)^T$, $\boldsymbol{\lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$; $\mathbf{x}$ – вектор нормализуемых случайных величин, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)^T$.

Отметим, что $\mathbf{z}$ имеет многомерное распределение Гаусса с нулевым вектором математического ожидания $\mathbf{m}_z$ и ковариационной матрицей $\boldsymbol{\Sigma}$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} D_{z_1} & \mu_{z_{12}} & \cdots & \mu_{z_{1m}} \\ \mu_{z_{21}} & D_{z_2} & \cdots & \mu_{z_{2m}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_{z_{m1}} & \mu_{z_{m2}} & \cdots & D_{z_k} \end{pmatrix},$$

где $\mu_{z_{kl}} = M\left\{(z_k - m_{z_k})(z_l - m_{z_l})\right\}$, $k \in [1, m]$, $l \in [1, m]$; $M\{\cdot\}$ – операция математического ожидания; $m_{z_k} = M\{z_k\}$; $D_{z_k} = M\left\{(z_k - m_{z_k})^2\right\}$.

На сегодня неизвестны работы, в которых рассматривалось решение задачи оценки параметров многомерного преобразования Джонсона для m-мерного случая. Решения этой задачи получены лишь для двумерного и трехмерного преобразований [1]. На конференции «Тараповские чтения-2012» авторами был представлен непараметрический подход подбора многомерного преобразования Джонсона для m-мерного случая. Однако оценки параметров, которые получают на основе этого подхода, не являются эффективными. Как известно, к эффективным оценкам приводит метод максимального правдоподобия для распределения Гаусса. Поэтому в работе для оценки параметров многомерного преобразования Джонсона предлагается применять метод максимального правдоподобия, осуществляя максимизацию функции

$$F = -m\ln(2\pi) - \ln|\mathbf{\Sigma}| - M\left\{(\mathbf{z}-\mathbf{m}_{\mathbf{z}})^{T}\mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{z}-\mathbf{m}_{\mathbf{z}})\right\} \quad (2)$$

с ограничениями

$$\hat{m}_{z_k} = 0;\ \hat{D}_{z_k} = 1;\ \hat{A}_{z_k} = 0;\ \hat{\varepsilon}_{z_k} = 3,\ k \in [1, m], \quad (3)$$

где $\hat{A}_{z_k} = \frac{1}{nS_{z_k}^3}\sum_{i=1}^{n}\left(z_{k_i} - \overline{z}_k\right)^3$; $\hat{\varepsilon}_{z_k} = \frac{1}{nS_{z_k}^4}\sum_{i=1}^{n}\left(z_{k_i} - \overline{z}_k\right)^4$;

$\hat{m}_{z_k} = \overline{z}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_{k_i}$; $\hat{D}_{z_k} = S_{z_k}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(z_{k_i} - \overline{z}_k\right)^2$.

Для семейств S_L и S_B ограничения (3) необходимо дополнить соответствующими ограничениями преобразования (1).

В качестве примера применения метода максимального правдоподобия на основе максимизации функции (2) рассмотрено оценивание параметров четырехмерного преобразования Джонсона для системы случайных величин x_1, x_2, x_3 и x_4.

Полученные результаты свидетельствуют о применимости метода максимального правдоподобия на основе максимизации функции (2) для оценивание параметров многомерного преобразования Джонсона.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kuhl M.E., Ivy J.S., Lada E.K., et al Multivariate Input Models for Stochastic Simulation. / www.ise.ncsu.edu/jwilson/files/kuhl09ajos.pdf.

2. Приходько С.Б. Багатовимірні перетворення для нормалізації математичних моделей нелінійних стохастичних диференціальних систем // Математичне моделювання. Дніпродзержинськ: ДДТУ. – 2009. – № 1 (20) – С. 12–15.

3. Приходько С.Б. Применение нормализующих преобразований для построения математических моделей нелинейных стохастических дифференциальных систем // Электронное моделирование. – 2011. – т.33. – № 2. – С.13–23.

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ С АТОМАРНЫМИ ВЕСАМИ

Рвачева Т. В.

Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского
«Харьковский авиационный институт», Украина

Обобщенные атомарные ряды Тейлора [1, 2], являющиеся интерполяционными рядами типа Биркгоффа и построенные на основе атомарных функций – решений с компактными носителями линейных функционально-дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и линейно преобразованными аргументами (обобщенными уравнениями пантографа) [3], могут быть успешно применены для вычисления интегралов, зависящих от параметров, интегральных преобразований, в частности преобразования Фурье [4], и решения интегральных уравнений с ядрами типа потенциала, которые встречаются, в частности в электростатике, электродинамике и теории антенн [5].

В связи с этим требуется вычислять интегралы от произведения базисных функций атомарного обобщенного ряда Тейлора на заданную функцию. Для вычисления этих интегралов предлагается использовать квадратурные формулы типа Ньютона-Котеса с весом [6]:

$$\int_a^b f(x)p(x)dx \approx \int_a^b L_n(x)p(x)dx,$$

где в качестве веса p(x) выступают базисные функции обобщенного ряда Тейлора, $L_n(x)$ – интерполяционный многочлен Лагранжа степени n – 1, совпадающий с функцией f(x) в точках

$$x_j = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}d_j, \text{ где } d_1, ..., d_n \in [-1, 1],$$

а оценка погрешности имеет вид:

$$|R_n(f)| \le \left(\max_{[a,b]}\left|f^{(n)}(x)\right|\right)\int_a^b \frac{|\omega_n(x)||p(x)|}{n!}dx,$$

где

$$\omega_n(x) = (x - x_1)...(x - x_n).$$

Использование этих формул требует вычисления моментов базисных функций обобщенного ряда Тейлора.

Базисные функции обобщенного ряда Тейлора представляют собой конечные линейные комбинации сдвигов функции up(x), являющейся решением с компактным носителем функционально-дифференциального уравнения

$$y'(x) = 2y(2x+1) - 2y(2x-1).$$

Вследствие этого для вычисления моментов базисных функций обобщенного ряда Тейлора можно использовать формулу интегрирования по частям, учитывая тот факт, что получившиеся интегралы от базисных функций и их первообразных выражаются через значения функции up(x).

Также следует отметить, что для базисных функций с большими номерами получены асимптотические разложения [7,8], которые могут быть использованы при вычислении рассмотренных выше интегралов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рвачев В.А. Обобщенные ряды Тейлора для бесконечно дифференцируемых функций // Мат. методы анализа динамических систем. – 1982. – Вып. 6. – С. 99–102.

2. Рвачев В.А. Финитные решения функционально-дифференциальных уравнений и их применение // Усп. матем. наук. – 1990. – т. 45. – Вып. 1(271). – С. 77–103.