[1]. На конференции «Тараповские чтения-2012» авторами был представлен непараметрический подход подбора многомерного преобразования Джонсона для m-мерного случая. Однако оценки параметров, которые получают на основе этого подхода, не являются эффективными. Как известно, к эффективным оценкам приводит метод максимального правдоподобия для распределения Гаусса. Поэтому в работе для оценки параметров многомерного преобразования Джонсона предлагается применять метод максимального правдоподобия, осуществляя максимизацию функции

$$F = -m\ln(2\pi) - \ln|\boldsymbol{\Sigma}| - M\left\{(\mathbf{z}-\mathbf{m}_z)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{z}-\mathbf{m}_z)\right\} \quad (2)$$

с ограничениями

$$\hat{m}_{z_k} = 0;\ \hat{D}_{z_k} = 1;\ \hat{A}_{z_k} = 0;\ \hat{\varepsilon}_{z_k} = 3,\ k \in [1, m], \quad (3)$$

где $\hat{A}_{z_k} = \frac{1}{nS_{z_k}^3}\sum_{i=1}^{n}\left(z_{k_i} - \overline{z}_k\right)^3$; $\hat{\varepsilon}_{z_k} = \frac{1}{nS_{z_k}^4}\sum_{i=1}^{n}\left(z_{k_i} - \overline{z}_k\right)^4$;

$\hat{m}_{z_k} = \overline{z}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_{k_i}$; $\hat{D}_{z_k} = S_{z_k}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(z_{k_i} - \overline{z}_k\right)^2$.

Для семейств S_L и S_B ограничения (3) необходимо дополнить соответствующими ограничениями преобразования (1).

В качестве примера применения метода максимального правдоподобия на основе максимизации функции (2) рассмотрено оценивание параметров четырехмерного преобразования Джонсона для системы случайных величин x_1, x_2, x_3 и x_4.

Полученные результаты свидетельствуют о применимости метода максимального правдоподобия на основе максимизации функции (2) для оценивание параметров многомерного преобразования Джонсона.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kuhl M.E., Ivy J.S., Lada E.K., et al Multivariate Input Models for Stochastic Simulation. / www.ise.ncsu.edu/jwilson/files/kuhl09ajos.pdf.

2. Приходько С.Б. Багатовимірні перетворення для нормалізації математичних моделей нелінійних стохастичних диференціальних систем // Математичне моделювання. Дніпродзержинськ: ДДТУ. – 2009. – № 1 (20) – С. 12–15.

3. Приходько С.Б. Применение нормализующих преобразований для построения математических моделей нелинейных стохастических дифференциальных систем // Электронное моделирование. – 2011. – т.33. – № 2. – С.13–23.

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ С АТОМАРНЫМИ ВЕСАМИ

Рвачева Т. В.

Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», Украина

Обобщенные атомарные ряды Тейлора [1, 2], являющиеся интерполяционными рядами типа Биркгоффа и построенные на основе атомарных функций – решений с компактными носителями линейных функционально-дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и линейно преобразованными аргументами (обобщенными уравнениями пантографа) [3], могут быть успешно применены для вычисления интегралов, зависящих от параметров, интегральных преобразований, в частности преобразования Фурье [4], и решения интегральных уравнений с ядрами типа потенциала, которые встречаются, в частности в электростатике, электродинамике и теории антенн [5].

В связи с этим требуется вычислять интегралы от произведения базисных функций атомарного обобщенного ряда Тейлора на заданную функцию. Для вычисления этих интегралов предлагается использовать квадратурные формулы типа Ньютона-Котеса с весом [6]:

$$\int_a^b f(x)p(x)dx \approx \int_a^b L_n(x)p(x)dx,$$

где в качестве веса p(x) выступают базисные функции обобщенного ряда Тейлора, $L_n(x)$ – интерполяционный многочлен Лагранжа степени n – 1, совпадающий с функцией f(x) в точках

$$x_j = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}d_j, \text{ где } d_1, ..., d_n \in [-1, 1],$$

а оценка погрешности имеет вид:

$$|R_n(f)| \le \left(\max_{[a,b]}\left|f^{(n)}(x)\right|\right)\int_a^b \frac{|\omega_n(x)||p(x)|}{n!}dx,$$

где

$$\omega_n(x) = (x - x_1)...(x - x_n).$$

Использование этих формул требует вычисления моментов базисных функций обобщенного ряда Тейлора.

Базисные функции обобщенного ряда Тейлора представляют собой конечные линейные комбинации сдвигов функции up(x), являющейся решением с компактным носителем функционально-дифференциального уравнения

$$y'(x) = 2y(2x+1) - 2y(2x-1).$$

Вследствие этого для вычисления моментов базисных функций обобщенного ряда Тейлора можно использовать формулу интегрирования по частям, учитывая тот факт, что получившиеся интегралы от базисных функций и их первообразных выражаются через значения функции up(x).

Также следует отметить, что для базисных функций с большими номерами получены асимптотические разложения [7,8], которые могут быть использованы при вычислении рассмотренных выше интегралов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рвачев В.А. Обобщенные ряды Тейлора для бесконечно дифференцируемых функций // Мат. методы анализа динамических систем. – 1982. – Вып. 6. – С. 99–102.

2. Рвачев В.А. Финитные решения функционально-дифференциальных уравнений и их применение // Усп. матем. наук. – 1990. – т. 45. – Вып. 1(271). – С. 77–103.

3. Рвачев В.Л, Рвачев В.А. Неклассические методы теории приближений в краевых задачах – Киев: Наук. думка, 1979.– 196 с.
4. Рвачева Т.В. Вычисление преобразования Фурье с помощью атомарных рядов Тейлора. // Радіоелектронні і комп’ютерні системи. – 2011. – №1(49). – С. 113–116.
5. Рвачев В.А., Рвачева Т.В., Томилова Е.П. Применение атомарных обобщенных рядов Тейлора к решению интегральных уравнений электродинамики и теории антенн. // Радіоелектронні і комп’ютерні системи. – 2013. – №1(60). – С. 7–14.
6. Бахвалов Н.С., Жидков М.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2007. – 630 с.
7. Рвачова Т. В. Про асимптотику базисних функцій узагальненого ряду Тейлора // Доповіді Національної академії наук України. – 2003. – № 5. – С. 37 – 41.
8. Рвачева Т.В. Об асимптотике базисных функций обобщенного ряда Тейлора // Вісник Харківського національного університету. Сер. «Математика, прикладна математика і механіка». – 2003. – вып. 53(602). – С. 94 – 104.

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ РОБАСТНОГО СИНТЕЗА

Ревина Т. В.

ХНУ им. В. Н. Каразина, Харьков, Украина

В настоящей работе рассматривается задача робастного позиционного синтеза для линейной системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=(A_0+p(x,t)R)x+b_0u,$$
$$-d_1\le p(x,t)\le d_2,\quad d_1,d_2>0,$$

где x – фазовый n – мерный вектор; u – скалярное управление, удовлетворяющее ограничению $|u|\le 1$; A_0, R, b_0 – вещественные постоянные матрицы параметров объекта, причем при $p(x,t)=0$ система полностью управляема. Под позиционным синтезом ограниченного управления будем понимать нахождение такого управления $u(x)$, удовлетворяющего ограничению $|u(x)|\le 1$, что траектория $x(t)$ системы $\dot{x}=(A_0+p(x,t)R)x+b_0u(x)$, выходящая из произвольной точки x_0, оканчивается в точке $x_1=0$ в некоторый конечный момент времени $T(x_0,p)\le\infty$ при любом допустимом p.

Решение проводится на основе метода функции управляемости В. И. Коробова [1]. Обозначим матрицы

$$F=\left(\int_0^1(1-t)e^{-A_0t}b_0b_0^*e^{-A_0^*t}dt\right)^{-1},\ D(\Theta)=\mathrm{diag}\left(\Theta^{-\frac{2n-2i+1}{2}}\right)_{i=1}^{n}.$$

Функция управляемости $\Theta=\Theta(x)$ определяется как положительное решение уравнения

$$2a_0\Theta=(D(\Theta)FD(\Theta)x,x),\quad x\neq0,\quad \Theta(0)=0,\quad 0<a_0<2/f_{nn}. \qquad (1)$$

Управление задается формулой

$$u(x)=-b_0^*D(\Theta)FD(\Theta)x/2 \qquad (2)$$

Обозначим матрицы

$$S=\Theta(FD(\Theta)RD^{-1}(\Theta)+D^{-1}(\Theta)R^*D(\Theta)F),\quad H=diag\left(-(2n-2i+1)/2\right)_{i=1}^{n},$$

$$F^1=F-FH-HF.$$

Зададим $0<\gamma<1$ и потребуем, чтобы $\dot{\Theta}\le-\gamma$. Из [1,2] вытекает

Теорема. *Пусть* $d_1=\dfrac{1-\gamma}{\lambda_{\min}((F^1)^{-1}S)}$, $d_2=\dfrac{1-\gamma}{\lambda_{\max}((F^1)^{-1}S)}$, *функция управляемости* $\Theta(x)$ *есть положительное решение уравнения (1), а управление задается формулой (2). Тогда траектория системы, выходящая из произвольной точки* x_0, *оканчивается в точке* $x_1=0$ *в некоторый конечный момент времени* $T(x_0,p)\le\Theta(x_0)/\gamma$.

Пример. Пусть система имеет вид $\dot{x}_1=(1+p(x_1,x_2,x_3,t))x_2$, $\dot{x}_2=x_3$, $\dot{x}_3=u$, тогда

$$-\frac{(1-\gamma)(\sqrt{6}+1)}{10}\le p(x_1,x_2,x_3,t)\le\frac{(1-\gamma)(\sqrt{6}-1)}{10}.$$

Решение проиллюстрировано для конкретных p, например, пусть

$$p(x_1,x_2,x_3,t)=\begin{cases}-0.34\sin(x_1^2+x_2^2+x_3^2) & t\in[0.9.2]\\ 0.14\cos(x_1^2+x_2^2+x_3^2) & t\in[9.2,18.4]\end{cases}$$

Выберем начальную точку $x_0=(4;-4;1)$. Тогда положительное решение уравнения (1) равно $\Theta_0\approx18.55$, время попадания в начало координат $T(x_{0,}p)\approx18.4$. Траектория представлена на рис 1, производная от функции управляемости на траектории в силу системы – на рис 2.

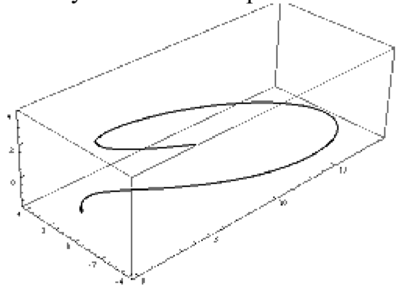

Рис. 1: Траектория.

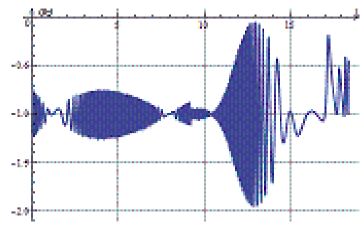

Рис. 2: Производная от функции управляемости на траектории.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коробов В. И. Метод функции управляемости. – М.–Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2007. – 576 с.
2. Fu M., Barmish B. R. Maximal unidirectional perturbation bounds for stability of polinomials and matrices.// Systems & Control Letters. – 1988. – N 11. – P. 173–179.