ребро, имеют одну биссектрису. Трехреберники, содержащие более одного параболического ребра, биссектрис не имеют. Нас будут интересовать трехреберники, все ребра которых непараболические. В докладе предполагаем доказать свойства биссектрис таких трехреберников.

Методы исследования. Плоскость $\hat{H}$ рассматриваем в проективной интерпретации Кэли-Клейна [1,2], как множество всех точек проективной плоскости, внешних относительно абсолютной овальной линии γ. Применяем канонические реперы первого и второго типа. Вершины канонического репера первого (второго) типа образуют автополярный трехвершинник первого (второго) порядка относительно линии γ. Единичная точка в каноническом репере первого типа лежит на касательных к линии γ, проведенных из первых двух вершин, а в репере второго типа – принадлежит линии γ.

На плоскости $\hat{H}$ существует три типа прямых: прямые, пересекающие абсолют в двух действительных (мнимых) точках, называют гиперболическими (эллиптическими), прямые, имеющие с абсолютом одну точку касания, называют параболическими.

Трехвершинником плоскости $\hat{H}$ назовем совокупность трех не лежащих на одной прямой точек и трех отрезков, циклически соединяющих эти точки.

Трехвершинник плоскости $\hat{H}$, обладающий внутренностью, назовем *трехреберником*.

Основным результатом является следующая

Теорема. *На плоскости $\hat{H}$ биссектрисы трехреберников типов eee(I), eee(III), eeh(I), hhh(I) пересекаются в одной точке.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Ромакина Л.Н. Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны: в 4 ч. Ч. 1: Тригонометрия. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2013.
2. Розенфельд Б.А. Неевклидовы пространства. М.: Наука, 1969.

АСИМПТОТИЧЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ФУНКЦИЙ С НУЛЕВЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ ПО ГЕОДЕЗИЧЕСКИМ НА СФЕРЕ

**Савостьянова И.М., Волчков В.В.*

Донецкий национальный университет, Украина

Изучаются четные функции на двумерной сфере с нулевыми интегралами по всем замкнутым геодезическим (большим окружностям), не проходящими через полюса сферы. Найдено допустимое асимптотическое поведение таких функций при подходе к полюсу. Подобные вопросы для некомпактного случая рассматривались ранее Ф. Йоном, Д. Смитом и другими авторами см. [1 – 2].

Пусть $S^2 = \{\xi \in R^3 : |\xi| = 1\}$, $E = \{\xi \in R^3 : \xi \neq \pm 1\}$. Обозначим через *M* совокупность всех непрерывных функций на *E*, имеющих нулевые интегралы по каждой большой окружности из *E*. Положим

$$C_{even} = \{f \in C(E) : f(-\xi) = f(\xi), \forall \xi \in E\},$$

$$C_{odd} = \{f \in C(E) : f(-\xi) = -f(\xi), \forall \xi \in E\}.$$

Введем также классы $M_{even} = M \cap C_{even}$, $M^m{}_{even} = M_{even} \cap C^m(E)$, $m = \{0,1,2,...\}$.

Теорема. ***1)*** *Пусть* $f \in M_{even}$ *и* $f(\xi) = o\left((1-\xi_3)^{-1}\right)$ *при* $\xi_3 \to 1$. *Тогда* $f \equiv 0$.

2) *Существует ненулевая функция* $f \in M^\infty{}_{even}$ *такая, что*

$$f(\xi) = O\left((1-\xi_3)^{-1}\right) \text{ при } \xi_3 \to 1.$$

Теорема показывает, что всякая функция $f \in M$, удовлетворяющая условию $f(\xi) = o\left((1-\xi_3^2)^{-1}\right)$ при $\xi_3 \to \pm 1$ принадлежит C_{odd}. При этом символ "o" нельзя заменить на символ "O".

Сформулированные результаты можно использовать для описания функций имеющие нулевые интегралы по большим окружностям, доказательства теорем о двух радиусах,теорем единственности и т.д.

ЛИТЕРАТУРА

1. Йон Ф. Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными. – М.: ИЛ, 2011. – 156 с.
2. Volchkov V. V., Volchkov Vit. V. Offbeat integral geometry on symmetric spaces. – Basel: Birkhäuser, 2013. – 592 p.

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРИ РАЗМЕЩЕНИИ ТРЕХМЕРНЫХ ОБЪЕКТОВ

Сёмкин В.В., Чугай А.М.

Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАНУ, Харьков, Украина

Применение математического и компьютерного моделирования при решении задач компоновки позволяет численно реализовать на компьютере такие задачи как поиск параметров размещения, оптимизирующих заданный критерий качества компоновки, оценку получаемого размещения по выбранному критерию, оценку ограничений на размещение (непересечение размещаемых объектов, расположение на заданных расстояниях, размещение внутри области размещения).

В работе для построения математической модели задачи поиска оптимального размещения трехмерных объектов был использован метод Ф–функций (построены нормализованные Ф-функции для размещаемых трехмерных объектов). Это позволило использовать на всех этапах решения задачи современные методы нелинейной оптимизации.

Разработанный в данной работе подход к поиску решения задачи предполагает выполнение следующих этапов: построение начальных точек, поиск локальных экстремумов и их перебор.

При решении оптимизационных задач размещения геометрических объектов для получения начальных точек, как правило, используются различные “жадные” алгоритмы. Однако эти алгоритмы не гарантируют получение любых начальных точек. Кроме того, вычислительные затраты для построения начальных точек значительно возрастают в трехмерном случае. В связи с этим в работе предлагается подход, который позволяет расширить размерность задачи за счет введения переменных метрических характеристик размещаемых объектов и решения последовательности вспомогательных задач нелинейного программирования.

Для поиска локальных экстремумов используется метод последовательного улучшения значений функции цели на последовательности подобластей. При этом поиск локального экстремума на каждой подобласти осуществлялся с использованием библиотеки IPOPT. В данной библиотеке реализованы алгоритмы внутренней точки, которые для поиска вектора движения используют матрицу Гессе левой части системы ограничений, описывающей область допустимых решений. Кроме того, данная библиотека демонстрирует эффективность на задачах с матрицами, которые имеют блочную структуру и высокую степень разреженности, а также на плохо обусловленных задачах.

Эффективность предложенного метода решения задачи заключается в реализации последовательных изменений размерности пространства решений при осуществлении непрерывных переходов между вспомогательными задачами.

ОБРАБОТКА ИЗОБРАЖЕНИЙ, ПОЛУЧЕННЫХ НА АТОМНО-СИЛОВОМ МИКРОСКОПЕ

Стародубцев И. Е.

ГГУ им. Ф.Скорины, Гомель, Республика Беларусь

Введение. Для изучения структуры поверхности объектов с высоким (нанометровым) разрешением в материаловедении, биологии и медицине применяется атомно-силовой микроскоп (АСМ). В отличие от других типов микроскопов АСМ обладает целым рядом преимуществ: он позволяет получить трехмерный рельеф поверхности, пространственное распределение микро- и наномеханических свойств и некоторые локальные механические характеристики (например, модуль Юнга). Кроме того, для его работы не требуется предварительное нанесение специального покрытия на образец.

Из первичных АСМ-данных (массив точек, характеризующих поверхность и распределение механических свойств на ней) при помощи специальных алгоритмов обработки может быть получен ряд характеристик поверхности. Одной из характеристик является размерность поверхности. Выделяют топологическую (целочисленную) и фрактальную (дробную) размерности [1]. Как правило, реальные природные структуры характеризуются фрактальной размерностью.

Фрактальная размерность используется для описания структур биологических клеток и тканей, а также для анализа изменений, имеющих место в этих структурах. Например, фрактальную размерность используют при анализе структур высушенных капель биологических жидкостей (слюны, мочи и т.п.), томографии головного мозга, поверхностей клеток при различных патологиях (диабете, раке, окислительном стрессе) [2].

В математике используют различные методы расчета фрактальной размерности (метод подсчета кубов, метод триангуляций, метод спектра мощностей, вариационный метод и другие).

Целью работы являлось создание программного обеспечения для оценки фрактальной размерности поверхностей (включая поверхности биологических клеток) и карт их механических свойств на основе АСМ-данных методом подсчета кубов (бокс алгоритм, box counting).

Методы и результаты. Для расчета фрактальной размерности поверхностей использовалась формула $D = \lim_{\delta \to 0}[\ln N(\delta)/\ln(1/\delta)]$, где $N(\delta)$ – минимальное число кубов со стороной δ, покрывающих в совокупности искомую поверхность. Программное обеспечение (ПО) разработано на языке С++ в среде C++ Builder 6.

Для работы разработанного ПО необходимо ввести пространственные размеры области (размеры области АСМ-сканирования) и координаты всех распознанных точек поверхности (АСМ-массивы данных (x, y, z), включающие геометрический и механический образы поверхности).

Бокс алгоритм реализован следующим образом: область пространства, включающая исследуемую поверхность, разбивается кубической решеткой (с ребром куба, меньшим наименьшего абсолютного значения координат). Затем перебирается точки массива АСМ-данных и подсчитывается количество кубов решетки, в которых попадает хотя бы одна точка. Затем ребро куба решетки уменьшается в 2 раза, после чего процесс повторяется с начала до тех пор, пока ребро куба не станет меньше шага АСМ-сканирования, умноженного на некую константу. Экспериментальные данные показывают, что данная константа (например, для биологических клеток) должна быть >10. Это связано с тем, что при меньших значениях шага алгоритма АСМ-изображение перестает быть поверхностью с фрактальной размерностью >2.

По полученным данным строится массив пар: логарифм количества кубов и логарифм величины, обратной размеру ребра куба. Данные массива представляют собой точки двухмерного графика в логарифмическом масштабе. Так как поверхности клеток, как правило, обладают хорошими масштабно инвариантными (скейлинговыми) свойствами, то полученную зависимость можно аппроксимировать линейной функцией, причем тангенс угла наклона аппроксимирующей прямой будет являться фрактальной размерностью исходной поверхности (рис. 1).