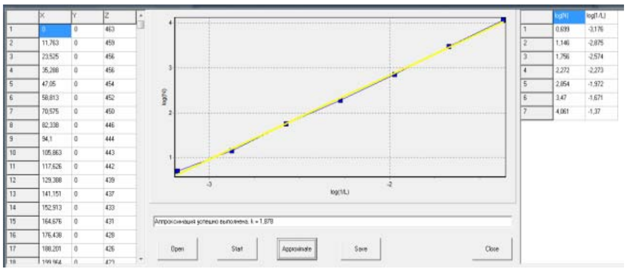

Рис.1. Вывод результатов аппроксимации.

Заключение. Разработанное программное обеспечение применяется для обработки данных, полученных на АСМ «NT – 206» (Беларусь, Гомель), для анализа структуры и механических свойств поверхностей биологических клеток (лейкоцитов, эритроцитов и раковых клеток).

ЛИТЕРАТУРА

1. Чумак, О. В. Энтропии и фракталы в анализе данных. – М.: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2011. – 164с.
2. Мандельброт, Б. Фрактальная геометрия природы. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. – 656 с.

ДИНАМИЧЕСКАЯ ГРУППА ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА И НУЛИ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА

Степановский Ю.П.

ХНУ им. В.Н. Каразина, Харьков, Украина,
ННЦ ХФТИ, Харьков, Украина

На стр. 252 книги Е.К. Титчмарша [1] приведена формула, с хорошей точностью при $n >> 0$ определяющая нули дзета-функции Римана $\zeta(z)$ в комплексной плоскости на прямой $z = 1/2 + iE$:

$$\frac{1}{2} E \ln \frac{E}{2\pi e} + \frac{7}{8}\pi = (n + \frac{1}{2})\pi . \tag{1}$$

Эта формула очень напоминает формулу, определяющую спектр некоторого квантово-механического гамильтониана в квазиклассическом приближении (при $h = 2\pi$, h – постоянная Планка):

$$\oint P(X)dX = (n + \frac{1}{2} + I_M) , \tag{2}$$

где I_M – индекс Маслова. В 1999 г. Берри и Киттинг [2] обнаружили, что очень простой гамильтониан $H = XP$ приводит к формуле (1). Разумеется, у гамильтониана $H = XP$ (в квантовом случае $\hat{H} = (\hat{X}\hat{P} + \hat{P}\hat{X})/2$) вообще нет никакого дискретного спектра, поскольку он описывает инфинитное движение, но, как это принято у физиков, Берри и Киттинг применили «регуляризацию»: они ввели условия $X > \sqrt{2\pi}$, $P > \sqrt{2\pi}$ (см. Рис. 1 из работы [2]).

Результат Берри и Киттинга столь же замечателен, сколь и загадочен. Цель настоящего сообщения – указать еще на одно замечательное свойство гамильтониана $\hat{H} = (\hat{X}\hat{P} + \hat{P}\hat{X})/2$.

Рис. 1. Область в фазовой плоскости, определяющая нули ζ –функции Римана

В 1965 г. С. С. Санников [3] обнаружил, что три оператора, связанные с лагранжианом, гамильтонианом и пфаффианом гармонического осциллятора

$$\begin{aligned} &J_1 = -i(\hat{P}^2 - \hat{X}^2)/4, \\ &J_2 = (\hat{P}^2 + \hat{X}^2)/4, \\ &J_3 = i(\hat{P}\hat{X} + \hat{X}\hat{P})/4, \\ &J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = -3/16, \end{aligned} \tag{3}$$

представляют собой инфинитезимальные операторы унитарного представления группы Лоренца *SO*(2,1), реализуемого операторами $\Lambda = \exp(i\vec{\phi}\vec{J})$. Роль времени играет ось $x_2 = it$. Угол поворота в плоскости 1–3 φ_2 – вещественный, а чисто мнимые «углы» φ_1=Arth V_1 и φ_3=Arth V_3 соответствуют преобразованиям Лоренца для относительного движения инерциальных систем отсчета вдоль осей 1 и 3 со скоростями V_1 и V_3. Найденное Санниковым унитарное представление группы Лоренца реализует динамическую группу симметрии гармонического осциллятора.

Отметим также, что еще в 1932 г. Э. Майорана исследовал решения бесконечно-компонентного релятивистского волнового уравнения, описывающего частицу с произвольным спином и не имеющего решений с отрицательной энергией [4]. В нашем упрощенном случае трехмерного пространства-времени уравнение Майораны имеет вид

$$\left[i(\vec{J}\frac{\partial}{\partial \vec{x}}) + m \right] |\psi\rangle = 0 \ , \tag{4}$$

(Майорана не связывал операторы $\vec{J}$ с гармоническим осциллятором и использовал довольно громоздкую реализацию операторов $\vec{J}$ бесконечно-компонентными матрицами).

Таким образом, существует связь между нулями дзета-функции Римана и бесконечномерными унитарными представлениями группы Лоренца *SO*(2,1). Изучение этой связи может быть полезным для решения проблемы Римана о нулях дзета-функции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Титчмарш Е.К. Теория дзета-функции Римана. – Москва: ИЛ, 1952. – 407 с.
2. Berry M.V., Keating J.P. The Riemann Zeros and Eigenvalue Asymptotics // SIAM Review. – 1999. – v. 41, N 2. – P. 236–266.

3. Санников С.С. О некомпактной группе симметрии осциллятора // ЖЭТФ. – 1965. – т. 49, вып. 6. – С. 1913–1922.
4. Majorana E. Teoria relativistica di particelle con momento intrinseco arbitrario // Nuovo Cimento. – 1932. – v. 9. – P. 335–344.

АНАЛИЗ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В ОБЪЕМНЫЕ В АНТЕННЕ ДИФРАКЦИОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Стешенко С.А.

Институт радиофизики и электроники им. А.Я. Усикова НАН Украины, Харьков, Украина

В данной работе рассмотрена математическая модель антенны вытекающих волн (или антенны дифракционного излучения, как ее принято называть в отечественной литературе), предложенной впервые в работе [1].

Действие этой антенны основано на эффекте преобразования поверхностной волны диэлектрического слоя в объемную на конечном числе рассеивателей. В качестве рассеивателей могут выступать канавки, вырезанные в металлической подложке. Такие рассеиватели формируют гребенку, однородную в одном из направлений. При этом длина гребенки в направлении однородности настолько велика, что такая антенна хорошо описывается двумерной моделью.

Двумерные модели антенны для случая нулевого зазора между слоем диэлектрика и решеткой были построены в [2] для *E*-поляризации и в [3] для *H*-поляризации. Случай *H*-поляризации для произвольного зазора между диэлектрическим слоем и решеткой рассмотрен в [4].

Как правило, в статьях, опубликованные в физических журналах, не уделяется должное внимание корректной математической формулировке рассматриваемой проблемы. В этой работе внимание уделено строгой постановке краевой задачи для случая *H*-поляризации с учетом условия на бесконечности для открытых волноводных систем [5] и численному методу ее решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Itoh T. Application of Gratings in a Dielectric Waveguide for Leaky-Wave Antennas and Band-Reject Filters. // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – 1977. – v.25, N12. – P. 1134–1138.
2. Uchida K. Numerical Analysis of Surface-Wave Scattering by Finite Periodic Notches in a Ground Plane. // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – 1987. – v.35, N5. – P. 481–486.
3. Park K., Lee J., Eom H., Hwangbo H., Chun W. TM-mode radiation of dielectric-grating antenna. // 17th AIAA Intern. Communications Satellite Systems Conf. and Exhibit. – 1998. – P. 305–312.
4. Steshenko S.O. The Accurate Two-Dimensional Model of the Effect of the Surface Waves Transformation into the Spatial Modes. // Telecom. and Radio Engin. – 2006. – v.65, N19. – P.1765–1782.
5. Nosich A.I. Radiation conditions, limiting absorption principle, and general relations in open waveguide scattering. // J. Electromag. Waves and Applic. – 1994. – v.8, N3. – P. 329–353.

ЗАЛЕЖНІСТЬ СТІЙКОСТІ ВІД ВЕЛИЧИНИ УЯВНОЇ ЧАСТИНИ КОЕФІЦІЄНТІВ

[*] *Філєр З. Ю., Чуйкова А.С.*

Кіровоградський державний педагогічний університет ім. В. Винниченка, Кіровоград, Україна

Завдання роботи полягають у дослідженні впливу комплексних коефіцієнтів на стійкість та розробці методів відшукання кута повороту радіуса-вектора годографа Михайлова. Це є актуальним тому, що теорія стійкості широко використовується для систем автоматичного керування.

1. Критерій Михайлова. Для диференціального рівняння (ДР) зі сталими коефіцієнтами $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 = 0.$ характеристичним рівнянням є $f(\lambda) = a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \ldots + a_1 y + a_0 = 0.$

Критерій Михайлова геометрично формулюється для годографа функції $f(i\omega)$: якщо при зміні ω від 0 до $+\infty$ радіус-вектор здійснює поворот на кут Φ=πn/2 проти годинникової стрілки, то система асимптотично стійка. Існує і алгебраїчне формулювання цього критерію: корені дійсної $u(\omega) = \Re f(i\omega)$ та уявної $v(\omega) = \Im f(i\omega)$ частин функції $f(i\omega)$ при зміні ω від 0 до $+\infty$. чергуються, між двома послідовними коренями однієї міститься: один корінь іншої. Очевидно $u(\omega) = a_0 - a_2\omega^2 + \ldots,$ $v(\omega) = a_1\omega - a_3\omega^3 + \ldots$.[1]. Перенесено застосування критерію Михайлова на рівняння з комплексними коефіцієнтами. ДР із комплексними коефіцієнтами є стійким, якщо радіус-вектор годографа робить поворот навколо точки (0,0) на кут Φ=πn. Як і в [1], виконується фінітизація замінами аргументу $\omega = t/(1-t)$ і функції $f := (1-|t|)^n f$. Але $t \in (-1;1)$.

2. Методи відшукання кута повороту годографа. Його можна знайти:

– за допомогою тангенса

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \operatorname{arctg}\left(\frac{u(t_n)v(t_{n+1}) - v(t_n)u(t_{n+1})}{(u(t_n)u(t_{n+1}) + v(t_n)v(t_{n+1}))}\right);$$

– за допомогою векторного добутку

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \arcsin\left(\frac{u_k v_{k+1} - v_k u_{k+1}}{\sqrt{u_k^2 + v_k^2}\sqrt{u_{k+1}^2 + v_{k+1}^2}}\right);$$

– за допомогою скалярного добутку

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \arccos\left(\frac{u_k u_{k+1} + v_k v_{k+1}}{\sqrt{u_k^2 + v_k^2}\sqrt{u_{k+1}^2 + v_{k+1}^2}}\right).$$