2. Berry M.V., Keating J.P. The Riemann Zeros and Eigenvalue Asymptotics // SIAM Review. – 1999. – v. 41, N 2. – P. 236–266.
3. Санников С.С. О некомпактной группе симметрии осциллятора // ЖЭТФ. – 1965. – т. 49, вып. 6. – С. 1913–1922.
4. Majorana E. Teoria relativistica di particelle con momento intrinseco arbitrario // Nuovo Cimento. – 1932. – v. 9. – P. 335–344.

АНАЛИЗ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В ОБЪЕМНЫЕ В АНТЕННЕ ДИФРАКЦИОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Стешенко С.А.

Институт радиофизики и электроники им. А.Я. Усикова НАН Украины, Харьков, Украина

В данной работе рассмотрена математическая модель антенны вытекающих волн (или антенны дифракционного излучения, как ее принято называть в отечественной литературе), предложенной впервые в работе [1].

Действие этой антенны основано на эффекте преобразования поверхностной волны диэлектрического слоя в объемную на конечном числе рассеивателей. В качестве рассеивателей могут выступать канавки, вырезанные в металлической подложке. Такие рассеиватели формируют гребенку, однородную в одном из направлений. При этом длина гребенки в направлении однородности настолько велика, что такая антенна хорошо описывается двумерной моделью.

Двумерные модели антенны для случая нулевого зазора между слоем диэлектрика и решеткой были построены в [2] для *E*-поляризации и в [3] для *H*-поляризации. Случай *H*-поляризации для произвольного зазора между диэлектрическим слоем и решеткой рассмотрен в [4].

Как правило, в статьях, опубликованные в физических журналах, не уделяется должное внимание корректной математической формулировке рассматриваемой проблемы. В этой работе внимание уделено строгой постановке краевой задачи для случая *H*-поляризации с учетом условия на бесконечности для открытых волноводных систем [5] и численному методу ее решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Itoh T. Application of Gratings in a Dielectric Waveguide for Leaky-Wave Antennas and Band-Reject Filters. // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – 1977. – v.25, N12. – P. 1134–1138.
2. Uchida K. Numerical Analysis of Surface-Wave Scattering by Finite Periodic Notches in a Ground Plane. // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – 1987. – v.35, N5. – P. 481–486.
3. Park K., Lee J., Eom H., Hwangbo H., Chun W. TM-mode radiation of dielectric-grating antenna. // 17th AIAA Intern. Communications Satellite Systems Conf. and Exhibit. – 1998. – P. 305–312.
4. Steshenko S.O. The Accurate Two-Dimensional Model of the Effect of the Surface Waves Transformation into the Spatial Modes. // Telecom. and Radio Engin. – 2006. – v.65, N19. – P.1765–1782.
5. Nosich A.I. Radiation conditions, limiting absorption principle, and general relations in open waveguide scattering. // J. Electromag. Waves and Applic. – 1994. – v.8, N3. – P. 329–353.

ЗАЛЕЖНІСТЬ СТІЙКОСТІ ВІД ВЕЛИЧИНИ УЯВНОЇ ЧАСТИНИ КОЕФІЦІЄНТІВ

* *Філер З. Ю., Чуйкова А.С.*

Кіровоградський державний педагогічний університет ім. В. Винниченка, Кіровоград, Україна

Завдання роботи полягають у дослідженні впливу комплексних коефіцієнтів на стійкість та розробці методів відшукання кута повороту радіуса-вектора годографа Михайлова. Це є актуальним тому, що теорія стійкості широко використовується для систем автоматичного керування.

1. Критерій Михайлова. Для диференціального рівняння (ДР) зі сталими коефіцієнтами $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 = 0.$ характеристичним рівнянням є $f(\lambda) = a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + ... + a_1 y + a_0 = 0.$

Критерій Михайлова геометрично формулюється для годографа функції $f(i\omega)$: якщо при зміні ω від 0 до $+\infty$ радіус-вектор здійснює поворот на кут Φ=πn/2 проти годинникової стрілки, то система асимптотично стійка. Існує і алгебраїчне формулювання цього критерію: корені дійсної $u(\omega) = \Re f(i\omega)$ та уявної $v(\omega) = \Im f(i\omega)$ частин функції $f(i\omega)$ при зміні ω від 0 до $+\infty$. чергуються, між двома послідовними коренями однієї міститься: один корінь іншої. Очевидно $u(\omega) = a_0 - a_2\omega^2 + ...,$ $v(\omega) = a_1\omega - a_3\omega^3 + ...$ [1]. Перенесено застосування критерію Михайлова на рівняння з комплексними коефіцієнтами. ДР із комплексними коефіцієнтами є стійким, якщо радіус-вектор годографа робить поворот навколо точки (0,0) на кут Φ=πn. Як і в [1], виконується фінітизація замінами аргументу $\omega = t/(1-t)$ і функції $f := (1-|t|)^n f.$ Але $t \in (-1;1).$

2. Методи відшукання кута повороту годографа. Його можна знайти:

– за допомогою тангенса

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \mathrm{arctg}\left(\frac{u(t_n)v(t_{n+1}) - v(t_n)u(t_{n+1})}{\left(u(t_n)u(t_{n+1}) + v(t_n)v(t_{n+1})\right)}\right);$$

– за допомогою векторного добутку

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \arcsin\left(\frac{u_k v_{k+1} - v_k u_{k+1}}{\sqrt{u_k^2 + v_k^2}\sqrt{u_{k+1}^2 + v_{k+1}^2}}\right);$$

– за допомогою скалярного добутку

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \arccos\left(\frac{u_k u_{k+1} + v_k v_{k+1}}{\sqrt{u_k^2 + v_k^2}\sqrt{u_{k+1}^2 + v_{k+1}^2}}\right).$$

Найточніше буде знайдений кут за допомогою скалярного добутку.

3. Вплив комплексного коефіцієнта *в₀* на стійкість. Досліджуємо статистику стійких і нестійких ДР третього порядку з дійсними коефіцієнтами:

$$a_0 + a_1 y' + a_2 y'' + a_3 y''' = 0.$$

Для того, щоб порахувати відсоток стійких і нестійких рівнянь третього порядку, складаємо генеральну сукупність. Перебираємо всі варіанти коефіцієнтів a_0, a_1, a_2, a_3, за умови, що вони цілі і змінюються від 1 до 9.

Рівняння третього порядку є стійким, якщо $a_0 \cdot a_3 < a_1 \cdot a_2$. Якщо ж буде виконуватись умова $a_0 \cdot a_3 = a_1 \cdot a_2$, то таке рівняння нестійке, але буде знаходитися на границі, тобто годограф буде проходити через точку (0;0). Рівняння 3-го порядку має 4 коефіцієнти a_0, a_1, a_2, a_3, тому всього варіантів буде $9^4 = 6561$.

Отримали: стійких 3176 (48,41%), нестійких (48,41%) і нестійких на границі 209 (3,19%). Нестійких рівнянь виявилося більше на 3,19% (209 штук), ніж стійких (за рахунок нестійких на границі).

Проаналізовано вплив уявного коефіцієнта $в_0$ на стійкість. Вибираємо лише стійкі рівняння третього порядку з дійсними коефіцієнтами, поступово додаємо до кожного з них уявний коефіцієнт $iв_0$, і отримаємо ДР виду:

$$a_3 y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 + ib_0 = 0$$

Розглянемо приклад:

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 7x + 2;$$

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 7x + 2 + 2i$$

Якщо коефіцієнт $в_0$ буде дорівнювати 1, то 267 рівнянь (8,4%) змінять свій характер стійкості, при $в_0$=5 нестійких 2440 (76,8%), при $в_0$=9 нестійких 3096 (97,5%) рівнянь, а при $в_0$ =11 всі рівняння (100%) будуть мати нестійкий характер. Можемо зробити висновок про достатньо великий вплив уявного коефіцієнта $iв_0$ на стійкість.

У доповіді розглядаються також рівняння із запізненням з членами $b \cdot y^{(k)}(t-\tau)$, досліджується вплив величини запізнення τ і коефіцієнта при b в ньому.

ЛИТЕРАТУРА

1. Филер З.Е., Музыченко А.И. Устойчивость линейных механических систем с последействием // Прикл. механика. – 2010. – т.46, N1. – С. 125 – 137.

О ГЛОБАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Филипковская М. С.

ХНУ им. В. Н. Каразина, Харьков, Украина

Рассматривается задача Коши для полулинейного вырожденного дифференциально-алгебраического уравнения (ДАУ)

$$\frac{d}{dt}\left(Ax(t)\right) + Bx(t) = f(t,x) + e(t), \quad (1)$$

$$x(0) = x^0 \quad (2)$$

в вещественном пространстве R^n при $t \ge 0$. Предполагается, что A, B –вещественные матрицы размерности $n \times n$, $\lambda A + B$ – регулярный характеристический пучок индекса 1. В дальнейшем будут применяться проекторы типа Рисса P_j, Q_j, $j = 1,2$ характеристического пучка матриц и специальная матрица G, введенные в статьях [1, 2] соответственно.

Ранее была доказана следующая теорема (см. [3]) существования и единственности глобального решения уравнения (1):

Теорема. *Пусть в уравнении* (1) $f(t,x) \in C([0,\infty) \times R^n, R^n)$, $e(t) \in C([0,\infty), R^n)$ *и производная* $\dfrac{\partial f(t,x)}{\partial x}$ *непрерывна на* $[0,\infty) \times R^n$. *Далее, пусть существует* $\alpha \in (0,1)$ *такое, что для любых* $y, z \in C([0,\infty), R^n)$ *выполнено условие*

$$\left\| G^{-1} Q_2 \left(f\left(t, x^1 + P_2 y\right) - f\left(t, x^1 + P_2 z\right) \right) \right\| \le \alpha \left\| P_2 y - P_2 z \right\|,$$

$t \ge 0$, *при каждом* $x^1 \in P_1 R^n$, *и существует постоянная матрица* $H = H^* > 0$ *такая, что для любого конечного интервала* $0 \le t \le T$ *найдется шар в* $P_1 R^n$ *радиуса* $r = r(T)$ *с центром в начале координат, вне которого выполнено условие* $\left(HP_1 x, G^{-1} Q_1 f(t,x)\right) \le 0$, $\|P_1 x\| \ge r(T)$, $0 \le t \le T$, *для всех точек* $(t,x) \in [0,\infty) \times R^n$, *удовлетворяющих уравнению* $BP_2 x = Q_2\left(f(t,x) + e(t)\right)$.

Тогда для любого $x^0 \in R^n$, *удовлетворяющего условию согласования* $BP_2 x^0 = Q_2\left(f(0,x^0) + e(0)\right)$, *существует решение уравнения* (1) *на полуоси* $0 \le t < \infty$ *с начальным условием* (2).

Также в статье [3] были рассмотрены две задачи для радиотехнического фильтра с нелинейными элементами, которые удовлетворяли условиям сформулированной теоремы. Однако данная теорема не всегда может эффективно применяться в физических задачах, имеющих глобальное решение.

Рассмотрим импедансную задачу для четырехполюсника (рис. 1) с заданными токами $I_1(t)$, $I_2(t)$, положительными вещественными параметрами L, C, r_1, r_2, g, нелинейными сопротивлениями ϕ_1, ϕ_2 и проводимостями h, h_1.