линейчатым аффинным подмногообразием в R^{n+k}, т.е. содержит *l* прямолинейных образующих.

Мы вводим специальную систему координат вдоль прямолинейной образующей и исследуем ее свойства. Далее мы доказываем две теоремы [8], которые являются аффинными аналогами теорем А.А. Борисенко в евклидовом случае [1] и дают достаточные условия цилиндричности аффинного подмногообразия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Борисенко А.А. Внешняя геометрия сильно-параболических многомерных подмногообразий // УМН. – 1997. – Т.52, N 6(318). – С. 3–52.
2. Nomizu K., Pinkall U. On the geometry of affine immersions // Mathematisce Zeitschrift. – 1987. – N195. – P. 165–178.
3. Nomizu K., Opozda B. On affine hypersurfaces with parallel nullity // J. Math. Soc. Japan, – 1992. – v. 44, N 4. – P. 693–699.
4. Nomizu K., Sasaki T. Affine differential geometry. – Cambridge University Press, 1994. – 264 p.
5. Opozda B. A Characterization of Affine Cylinders // Mh. Math. – 1996. – N 121. – P. 113–124.
6. Shugailo O.O. On affine immersions with flat connections // J. Math. Physics, Analysis, Geometry. – 2012. – v. 8, N 1. – P. 90–105.
7. Shugailo O.O. Affine Submanifolds of Rank Two // J. Math. Physics, Analysis, Geometry. – 2013. – v.9, N 2. – P. 227–238.
8. Шугайло Е.А. О цилиндричности аффинных подмногообразий //Proc.Intern.Geometry Center (в печати).

УСТОЙЧИВОСТЬ ЕДИНИЧНОГО КРУГА ОТНОСИТЕЛЬНО СОБСТВЕННОГО ПЕРИМЕТРА НА ПЛОСКОСТИ МИНКОВСКОГО

Щерба А.И.

Черкасский государственный технологический университет, Черкассы, Украина

Пусть B – выпуклая компактная фигура на аффинной плоскости A, для которой начало координат O – внутренняя точка. Следуя Минковскому, с помощью дистанционной функции $g(x)$, $x \in A$, фигуры B вводится расстояние между точками x и y из A: $\rho(x;y) = g(y-x)$. Аффинную плоскость A с метрикой ρ_B называют плоскостью Минковского и обозначают M, фигуру B называют единичным кругом, а его границу ∂B – единичной окружностью на M. Под $L^{\pm}(B)$ понимают соответственно длины единичной окружности, обходимой против и по часовой стрелке. Если фигура B симметрична относительно начала O, то ее направленные собственные периметры совпадают: $L^{+}(B) = L^{-}(B) = L(B)$. В 1932 г. Голаб С. установил, что для собственного периметра $L(B)$ симметричного единичного круга B справедливы достижимые оценки: $6 \le L(B) \le 8$. В 1967 г. Шеффер Дж. показал, что равенство $L(B)=6$ возможно только для аффинно правильного шестиугольника, а $L(B)=8$ – только для параллелограмма [1, гл.4]. Вопрос об устойчивости симметричного единичного круга B относительно величины собственного периметра в условиях близости $L(B)$ к возможным экстремальным значениям рассматривался в работах [2,3]. В случае несимметричной метрики на M, т.е. $B \ne -B$, известно, что для направленных собственных периметров $L^{\pm}(B) \ge 6$ и равенства возможны только когда B есть аффинно правильный шестиугольник [4].

Основной результат состоит в следующей теореме устойчивости.

Теорема. *Если* $L^{+}(B) = 6+\varepsilon$ *или* $L^{-}(B) = 6+\varepsilon$, $0 \le \varepsilon \le 10^{-9}$, *то существует аффинно правильный шестиугольник* S *с центром в начале* O, *для которого выполняются включения:* $S \subset B \subset (1+10^{3}\cdot\sqrt[3]{\varepsilon})\cdot S$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Thompson A.C., Minkowski Geometry. Camb. Univ. Press, Cambridge, 1996.
2. Shcherba A.I., On Stability of a Unit Ball in Minkowski Space with Respect to Self-Area. // J. Mathem. Phys., Analysis, Geom. – 2011. – v. 7, N 2. – P. 158–175.
3. Martini H., Shcherba A.I., On the stability of the unit circle with minimal self-perimeter in normed planes. // Colloq. Math. – 2013. – v. 131, N 1. – P. 69–87.
4. Щерба А.И., Единичный круг наименьшего самопериметра на плоскости Минковского. // Матем. Заметки. – 2007. – т. 81, N 1. – P. 125–135.

О ЕДИНИЧНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЯХ ПОСТОЯННОЙ СЕКЦИОННОЙ КРИВИЗНЫ

Ямпольский А.Л.

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, Украина.

Единичное векторное поле ξ на римановом многообразии (M,g) можно рассматривать как вложение $\xi : M \to T_1M$ в расслоение единичных векторов. На T_1M индуцируется риманова метрика, определяемая метрикой Сасаки $\tilde{g}$ касательного расслоения TM с линейным элементом $d\sigma^2 = ds^2 + |D\xi|^2$, где $D\xi$ – ковариантные дифференциалы координат вектора ξ. Таким образом на подмногообразии $\xi(M) \subset T_1M$ так же индуцируется риманова метрика..

Определение. *Секционной кривизной единичного векторного плоя* ξ *на римановом многообразии*

(M,g) *называется секционная кривизна подмногообразия* $\xi(M)\subset T_1M$ *с метрикой, индуцированной метрикой Сасаки касательного расслоения* TM.

Обозначим через $\mathfrak{X}(M)$ алгебру Ли гладких векторных полей на M. Для данного единичного векторного поля ξ, обозначим через $\mathfrak{X}_{\xi^\perp}(M)$ ортогональное дополнение к полю $\xi\in\mathfrak{X}(M)$ и определим линейный оператор $A_\xi:\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}_{\xi^\perp}(M)$ формулой $A_\xi X=-\nabla_X\xi$. Хорошо известны понятия горизонтального X^h и вертикального X^v поднятий векторного поля $X\in\mathfrak{X}(M)$ на касательное расслоение TM. Для единичного расслоения T_1M определяется тангенциальное поднятие $X^{\tan}\in T(T_1M)$ формулой $X^{\tan}=X^v-g(X,\xi)\xi^v$. В этих терминах дифференциал отображения $\xi:M\to T_1(M)$ приобретает вид $\xi_*X=X^h-(A_\xi X)^{\tan}$, а индуцированная на $\xi(M)$ метрика $\tilde g(\xi_*X,\xi_*Y)=g(X,Y)+g(A_\xi X,A_\xi Y)$.

В работе [1] были введены понятия *грубого гессиана* поля $\mathrm{Hess}_\xi(X,Y)=\frac{1}{2}\big((\nabla_X A_\xi)Y+(\nabla_Y A_\xi)X\big)$ и *тензора гармоничности* поля

$$\Gamma_\xi(X,Y)=\frac{1}{2}\big(R(A_\xi X,\xi)Y+R(A_\xi Y,\xi)X\big).$$

Вторая фундаментальная форма подмногообразия $\xi(M)\subset T_1M$ имеет вид [1]

$$\tilde\Omega(\xi_*X,\xi_*Y)=\big(A_\xi(\Gamma_\xi(X,Y))-\mathrm{Hess}_\xi(X,Y)\big)^{\tan}\downarrow_{T^\perp\xi(M)}$$

где символом $\downarrow$ обозначена соответствующая проекция. Из уравнения Гаусса секционная кривизна $\bar K$ подмногообразия $\xi(M)$ может быть найдена как

$$\bar K(\xi_*X,\xi_*Y)=\tilde K(\xi_*Y,\xi_*Y)+\tilde K_{ext}(\xi_*X,\xi_*Y),$$

где $\tilde K$ – секционная кривизна T_1M в направлении касательной к $\xi(M)$ площадке, а $\tilde K_{ext}$ – внешняя кривизна $\xi(M)$, имеющая в данном случае следующее выражение

$$\tilde K_{ext}:=\frac{\tilde g\big(\tilde\Omega(\xi_*Y,\xi_*Y),\tilde\Omega(\xi_*X,\xi_*X)\big)-\tilde g\big(\tilde\Omega(\xi_*X,\xi_*Y),\tilde\Omega(\xi_*X,\xi_*Y)\big)}{\tilde g(\xi_*X,\xi_*X)\cdot\tilde g(\xi_*Y,\xi_*Y)-\tilde g(\xi_*X,\xi_*Y)^2}.$$

Выражение секционной кривизны T_1M было получено в [2]. Естественно возникает вопрос о существовании векторных полей с заданными условиями на кривизну. Наш основной результат составляет

Теорема. *Базисное векторное поле* $\xi=e_1$ *на унимодулярной трехмерной группе Ли* G *с левоинвариантной метрикой и структурными константами* $\lambda_1\ge\lambda_2\ge\lambda_3$ *осуществляет вложение группы в* T_1G *с постоянной секционной кривизной* $\bar K$ *только в следующих случаях*

- $G=E(2)$, $\lambda_1=\lambda_2\ge\lambda_3=0$ *и* $\lambda_1=2(a+1/a)>\lambda_2=2/a>\lambda_3=0$. *При этом* $\bar K=0$;
- $G=SO(3)$, $\lambda_1=2a>\lambda_2=\lambda_3=\dfrac{2a^3}{a^2+1}>0$ *и* $\bar K=\dfrac{a^2}{(a^2+1)^2}$;
- $G=SO(3)$, $\lambda_1=a+\dfrac{1}{a}>\lambda_2=\max\{a,1/a\}>\lambda_3=\min\{a,1/a\}>0$ *и* $\bar K=1/4$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Yampolsky A. On special types of minimal and totally geodesic unit vector fields.// Proc. 7-th Intern. Conf. on Geometry, Integrability and Quantization. Varna, Bulgaria. – 2005. – P. 292 – 306.
2. Borisenko A., Yampolsky A. Riemannian geometry of bundles. // Uspehi Mat. Nauk. – 1991. – v.26, N6. – P. 51–95. (Engl. transl.: Russian Math. Surveys – 1991. v. 46, N 6. – P. 55–106.)