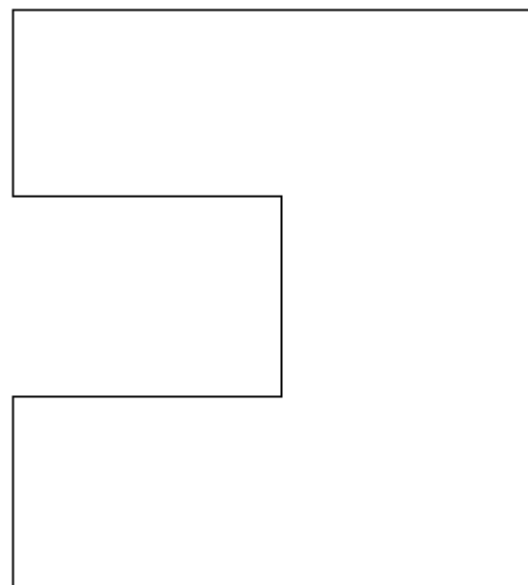
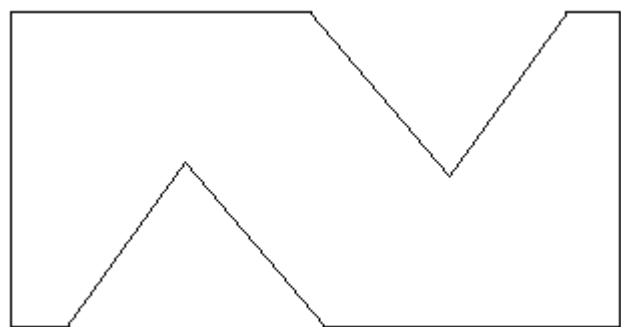
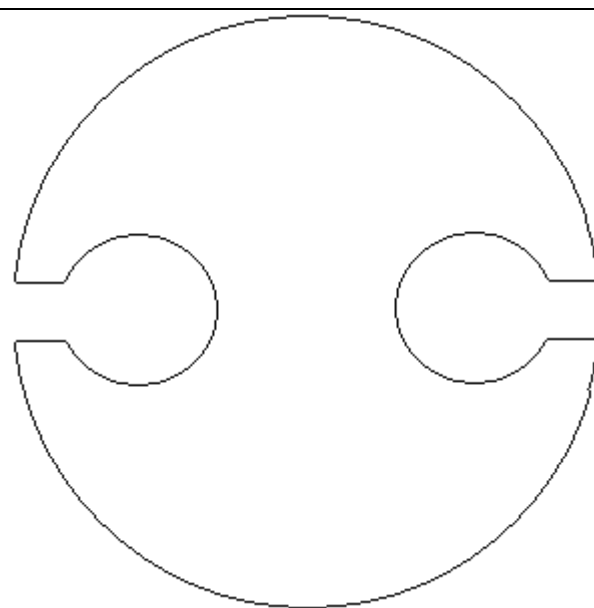
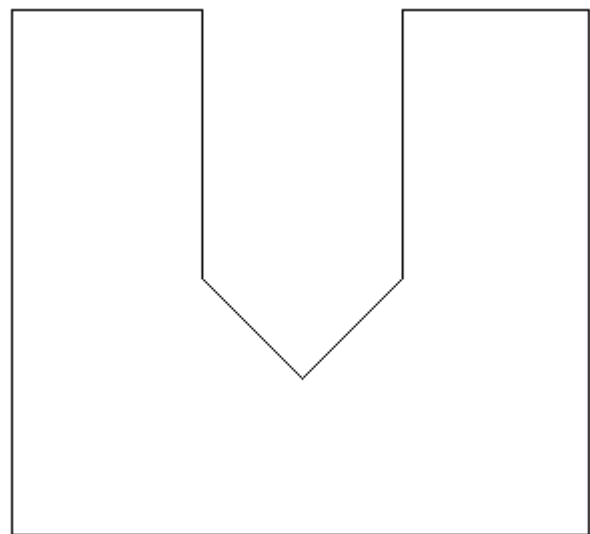
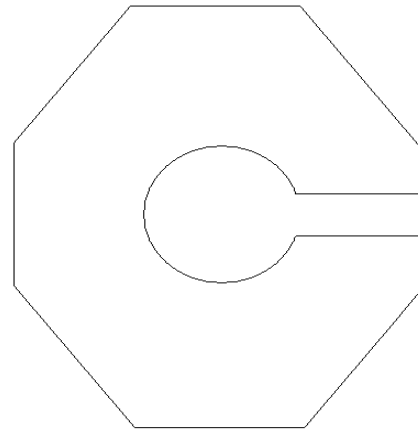
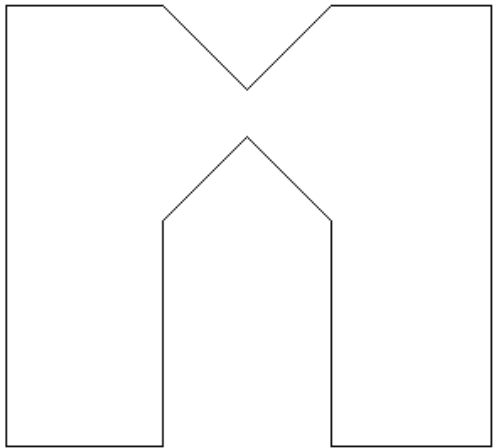
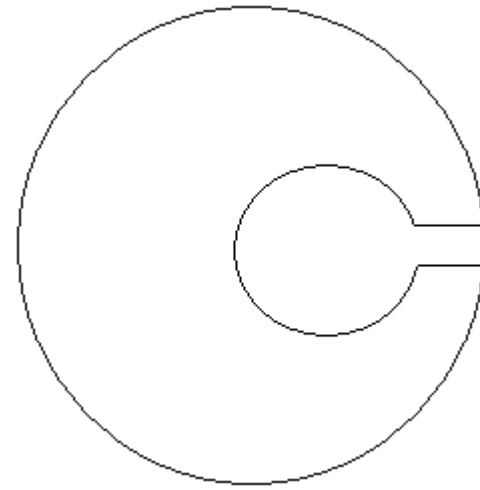
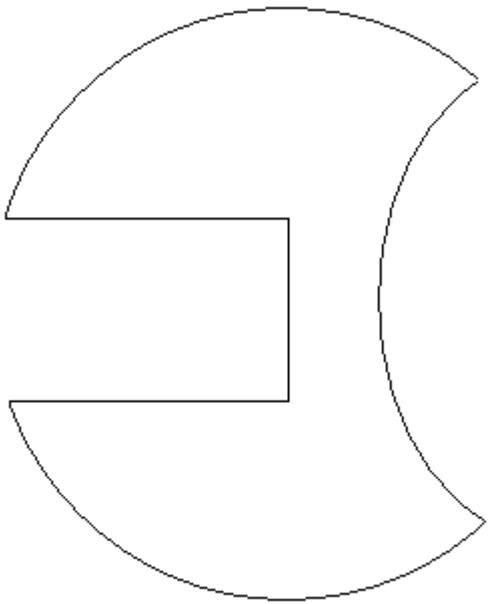


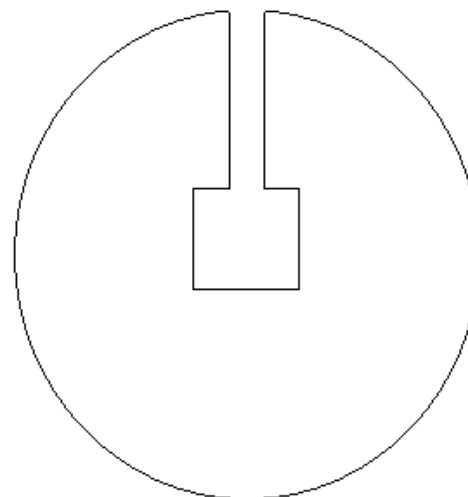
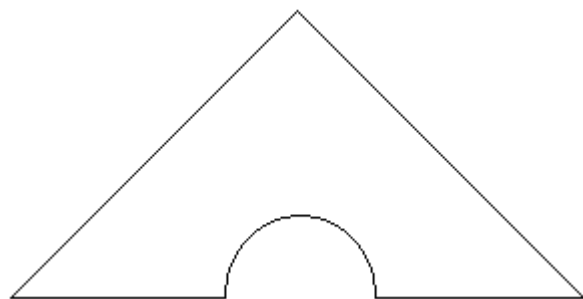
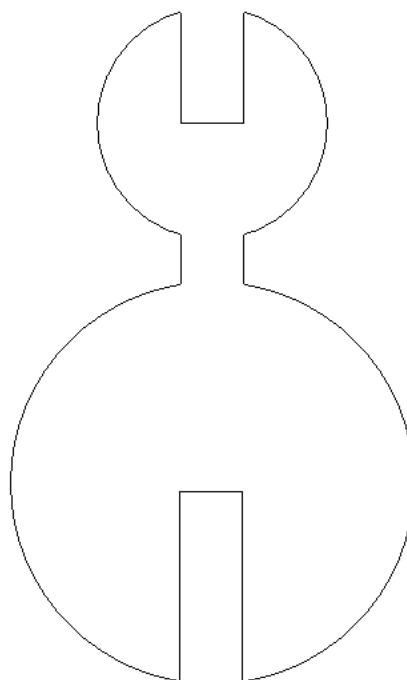
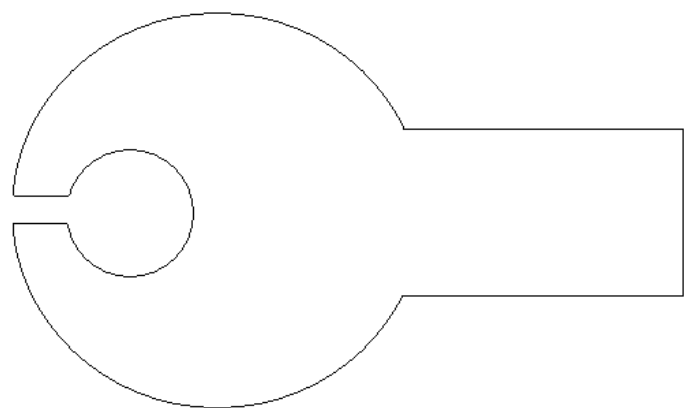
Завдання для практичних занять за спецкурсом
«Основи методу скінченних елементів»

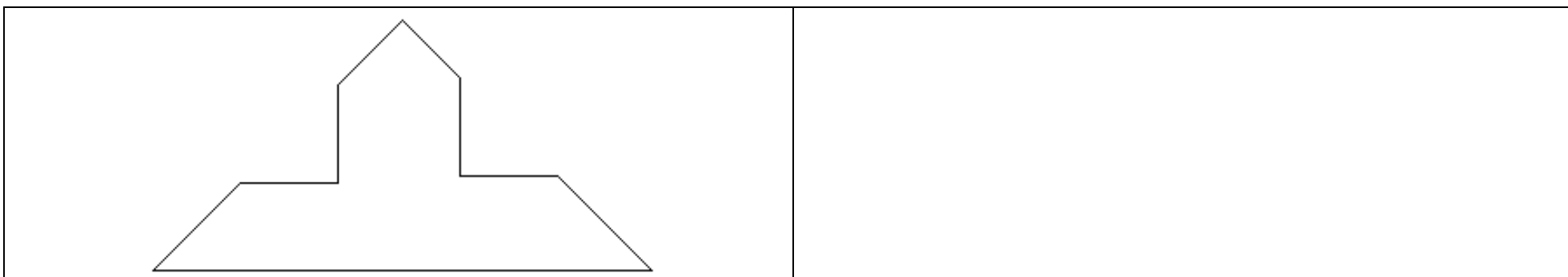
1. Завдання геометрії двовимірної області та генерація сітки (4 год.)
2. Розв'язання звичайного лінійного диференціального рівняння методом скінченних елементів (4 год.)
3. Будування лінійної інтерполяції та ізоліній в дискретизованій двовимірній області (4 год.)
4. Будування лінійної інтерполяції та ізоповерхонь в дискретизованій тривимірній області (4 год.)
5. Розв'язання одновимірної задачі про теплоперенос в неоднорідному стрижні. Випадки граничних умов Дирихле та Неймана на кінцях стрижня (4 год.)
6. Розв'язання двовимірної задачі про теплоперенос в області зі складною геометрією. Випадки граничних умов Дирихле та Неймана на границях області (4 год.)
7. Розв'язання двовимірної задачі про напружено-деформівний стан двовимірної області зі складною геометрією. Випадки зосереджених та розподілених сил та умов закріплення на границі області (6 год.)
8. Розв'язання двовимірної задачі термопружності про напружено-деформівний стан двовимірної області зі складною геометрією. Випадки умов Дирихле та Неймана для поля температури на границях області (6 год.)

1. Приклади геометрії для 2d області









2. Приклади ОДУ (коефіцієнти задачі)

| N | $p(x)$ | $q(x)$ | $f(x)$ | $y(0)$ | k | $y(x)$ |
|----|-------------------------|-------------------|--|--------|--------------|-------------------|
| 1 | $\cos(x)$ | $x-1$ | $\sin(x) (2 \cos(x) + x - 1)$ | 0 | 2.223244276 | $\sin(x)$ |
| 2 | $\sin(x)$ | x^3+2 | $x^4 \cos(x) + (2 \cos(x) \sin(x) + 2 \cos(x)) x - 3 \cos(x)^2 + 2$ | 0 | 0.7794359332 | $x \cdot \cos(x)$ |
| 3 | $1-x$ | x^2+1 | $6x + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 1$ | 1 | 12 | x^2+2x+1 |
| 4 | $1-x^2$ | $x-1$ | $6x^2 - 1 + x^3$ | -1 | 5 | x^2+x-1 |
| 5 | $(x+1) \cdot (x+2)$ | x^2 | $-6x - 9 + 3x^3 - x^2$ | -1 | 7 | $3x-1$ |
| 6 | $(x+1) \cdot \sin(x)$ | $x+\cos(x)$ | $-\sin(x) - \cos(x) + x^2$ | 0 | 3 | x |
| 7 | $(x^2+1) \cdot \cos(x)$ | $x \cdot \sin(x)$ | $-6x^2 \cos(x) + 3x^3 \sin(x) + 2x \sin(x) - 2 \cos(x)$ | 0 | 4 | x^2 |
| 8 | $(x+1) \cdot \exp(x)$ | $x-2$ | $x^3 + (-2e^x - 2)x^2 + (-6e^x + 1)x - 2e^x - 2$ | 1 | 6 | x^2+1 |
| 9 | $\tan(x)$ | $x+1$ | $x^2 \tan(x) + (-1 - 4 \tan(x)^2 - 3 \tan(x)^4 + \tan(x)) x - 3 \tan(x) - 3 \tan(x)^3$ | 0 | 8.097741997 | $x \cdot \tan(x)$ |
| 10 | $\exp(x^2)$ | x^2+1 | $x^4 + x^3 + (-4e^{(x^2)} + 1)x^2 + (-2e^{(x^2)} + 1)x - 2e^{(x^2)}$ | 0 | 7 | x^2+x |
| 11 | x^2+1 | $\exp(x^2)$ | $-x^3 e^x - 4x^2 e^x + (-3e^x + e^{(x(x+1))}) x - 2e^x$ | 0 | 10.87312731 | $x \cdot \exp(x)$ |

| | | | | | | |
|----|---------------|------------|---|----|------|------------|
| 12 | $\cos(x)$ | x^2+1 | $\sin(x)(2x+1) - 2\cos(x) + (x^2+1)(x^2+x-1)$ | -1 | 5 | x^2+x-1 |
| 13 | $\exp(x^2+x)$ | $\exp(-x)$ | $-(2x+1)e^{(x^2+x)}e^x - e^{(x^2+x)}e^x + e^{(-x)}e^x$ | 1 | $3e$ | $\exp(x)$ |
| 14 | x^2-1 | x^3+2 | $-2x(2x+2) - 2x^2+2 + (x^3+2)(x^2+2x+5)$ | 5 | 20 | x^2+2x+5 |
| 15 | $(x-1)/(x+1)$ | x^3-1 | $-\frac{2x+1}{x+1} + \frac{(x-1)(2x+1)}{(x+1)^2} - \frac{2(x-1)}{x+1} + (x^3-1)(x^2+x+1)$ | 1 | 9 | x^2+x+1 |

3.

Задание: Линейные интерполяционные полиномы, 2d случай

| N | Xi | Yi | Xj | Yj | Xk | Yk | Ti | Tj | Tk | T* |
|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|
| 1 | 0 | 0 | 5 | 2 | 1 | 4 | 40 | 60 | 42 | 55 |
| 2 | 1 | 4 | 5 | 2 | 6 | 6 | 42 | 60 | 62 | 55 |
| 3 | 1 | 4 | 6 | 6 | 3 | 9 | 42 | 62 | 45 | 55 |
| 4 | -4 | 0 | 0 | 0 | -2 | 3 | 80 | 85 | 90 | 88 |
| 5 | -2 | 3 | 0 | 0 | 2 | 3 | 90 | 85 | 90 | 88 |
| 6 | 0 | 0 | 4 | 0 | 2 | 3 | 85 | 80 | 90 | 88 |
| 7 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 2 | 100 | 120 | 130 | 125 |
| 8 | 0 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 130 | 120 | 140 | 125 |
| 9 | 1 | 1 | 2 | 0 | 2 | 2 | 120 | 110 | 140 | 125 |
| 10 | 0 | 0 | 2 | 5 | 0 | 5 | 10 | 50 | 40 | 30 |
| 11 | 0 | 0 | 4 | 0 | 2 | 5 | 10 | 20 | 50 | 30 |
| 12 | 2 | 5 | 4 | 0 | 4 | 5 | 50 | 20 | 40 | 30 |

Задание: Линейные интерполяционные полиномы, 3d случай

| N | Xi | Yi | Zi | Xj | Yj | Zj | Xk | Yk | Zk | Xm | Ym | Zm | Ti | Tj | Tk | Tm | T* |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|----|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 | 2 | 1 | 1 | 1 | -2 | 0 | 3 | 50 | 60 | 80 | 90 | 70 |
| 2 | -2 | 1 | 0 | 2 | 1 | 3 | 2 | -1 | -1 | 5 | 1 | 7 | 10 | 20 | 30 | 40 | 15 |
| 3 | -1 | 7 | 5 | 0 | 0 | 0 | -5 | 3 | 2 | 6 | 1 | 0 | 20 | 40 | 60 | 100 | 25 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | -2 | 3 | 2 | 1 | 0 | 5 | 100 | 120 | 40 | 60 | 50 |
| 5 | 1 | 3 | 2 | 0 | 0 | 0 | -2 | 5 | 8 | 3 | -3 | 6 | 20 | 40 | 100 | 80 | 30 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|---|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 6 | -1 | 2 | 1 | 1 | 7 | -4 | 0 | 0 | 0 | 2 | -2 | 4 | 50 | 80 | 70 | 60 | 55 |
| 7 | -1 | 1 | -1 | 2 | 0 | -3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | -2 | 20 | 60 | 100 | 70 | 40 |
| 8 | 1 | 2 | 3 | 1 | -1 | 4 | 2 | 7 | 0 | -3 | 2 | -6 | 20 | 40 | 80 | 70 | 65 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 1 | -2 | 1 | 0 | 5 | -4 | 2 | 0 | -2 | 40 | 80 | 60 | 20 | 30 |
| 10 | -1 | 2 | 2 | 0 | -2 | 6 | 5 | 3 | -1 | 0 | 2 | 2 | 100 | 80 | 20 | 50 | 40 |
| 11 | 0 | 2 | 2 | -2 | 0 | 1 | -4 | 3 | 1 | 2 | -2 | -6 | 20 | 120 | 100 | 160 | 80 |
| 12 | 0 | -2 | 1 | 0 | 0 | 4 | -1 | 3 | 7 | 5 | 8 | -4 | 100 | 40 | 120 | 70 | 110 |

4. Решить дифференциальное уравнение $K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$ с граничными условиями:

при $x = x_j$: $q = \text{const}$

при $x = x_k$: $J_k = \alpha(T - T_w)$

методом конечных элементов при следующих условиях:

| T | Число КЭ | j | условие | | j | условие | | для j= | K= | для j= | K= | для j= | K= |
|----|----------|---|----------------|------------|----|----------------|------------|-----------|-----|---------|-----|--------|----|
| 1 | 6 | 1 | q=10 | | 6 | q=-1 | | 1-3 | 2 | 4-6 | 1 | | |
| 2 | 7 | 1 | $\alpha = 2$ | $T_w = 20$ | 7 | q=8 | | 1,2,5 | 3.5 | 3,7 | 2.5 | 4 | 4 |
| 3 | 8 | 1 | q=5 | | 8 | $\alpha = 1$ | $T_w = 25$ | 1-4 | 1 | 5-6 | 2 | 7-8 | 3 |
| 4 | 9 | 1 | q=15 | | 9 | q=-3 | | 1-3 | 1 | 4-6 | 3 | 7-9 | 2 |
| 5 | 10 | 1 | $\alpha = 0.5$ | $T_w = 8$ | 10 | q=15 | | 1,3,5,7,9 | 4 | 2,4,6,8 | 2 | | |
| 6 | 6 | 1 | q=8 | | 6 | $\alpha = 2.5$ | $T_w = 35$ | 1,3,5 | 3 | 2 | 2 | 4,6 | 4 |
| 7 | 7 | 1 | q=2 | | 7 | q=-0.1 | | 1 | 2 | 2,3,4 | 3 | 5,6,7 | 1 |
| 8 | 8 | 1 | $\alpha = 1.5$ | $T_w = 16$ | 8 | q=5 | | 1-4 | 2 | 5 | 4 | 6-8 | 1 |
| 9 | 9 | 1 | q=6 | | 9 | $\alpha = 0.7$ | $T_w = 15$ | 1-2 | 3 | 3-7 | 1 | 8-9 | 4 |
| 10 | 10 | 1 | q=-1 | | 10 | q=10 | | 1-5 | 2.5 | 6-7 | 2 | 8-10 | 3 |
| 11 | 6 | 1 | $\alpha = 3$ | $T_w = 40$ | 6 | q=5 | | 1,6 | 1 | 2,5 | 1.5 | 3,4 | 2 |
| 12 | 7 | 1 | q=-1 | | 7 | $\alpha = 1.1$ | $T_w = 22$ | 1-5 | 4 | 6 | 2 | 7 | 3 |

| | | | | | | | | | | | | | |
|----|---|---|------|--|---|------|--|-----|---|-----|---|---------|-----|
| 13 | 8 | 1 | q=15 | | 8 | q=-3 | | 1-2 | 2 | 6,8 | 1 | 3,4,5,7 | 2.5 |
|----|---|---|------|--|---|------|--|-----|---|-----|---|---------|-----|

5. Задание: Расчет поля температуры в 2d области

| N | X_i | Y_i | X_j | Y_j | X_k | Y_k | i | условие | | j | условие : $T^* =$ | | k | условие | |
|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---|----------------|------------|---|----------------------|---|----------------|------------|--|
| 1 | 0 | 0 | 5 | 2 | 1 | 4 | 1 | q=10 | | 2 | 55 | 3 | q=-1 | | |
| 2 | 1 | 4 | 5 | 2 | 6 | 6 | 1 | $\alpha = 2$ | $T_w = 20$ | 2 | 55 | 3 | q=8 | | |
| 3 | 1 | 4 | 6 | 6 | 3 | 9 | 1 | q=5 | | 2 | 55 | 3 | $\alpha = 1$ | $T_w = 25$ | |
| 4 | -4 | 0 | 0 | 0 | -2 | 3 | 1 | q=15 | | 2 | 88 | 3 | q=-3 | | |
| 5 | -2 | 3 | 0 | 0 | 2 | 3 | 1 | $\alpha = 0.5$ | $T_w = 8$ | 2 | 88 | 3 | q=15 | | |
| 6 | 0 | 0 | 4 | 0 | 2 | 3 | 1 | q=8 | | 2 | 88 | 3 | $\alpha = 2.5$ | $T_w = 35$ | |
| 7 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 2 | 1 | q=2 | | 2 | 125 | 3 | q=-0.1 | | |
| 8 | 0 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | $\alpha = 1.5$ | $T_w = 16$ | 2 | 125 | 3 | q=5 | | |
| 9 | 1 | 1 | 2 | 0 | 2 | 2 | 1 | q=6 | | 2 | 125 | 3 | $\alpha = 0.7$ | $T_w = 15$ | |
| 10 | 0 | 0 | 2 | 5 | 0 | 5 | 1 | q=-1 | | 2 | 30 | 3 | q=10 | | |
| 11 | 0 | 0 | 4 | 0 | 2 | 5 | 1 | $\alpha = 3$ | $T_w = 40$ | 2 | 30 | 3 | q=5 | | |
| 12 | 2 | 5 | 4 | 0 | 4 | 5 | 1 | q=-1 | | 2 | 30 | 3 | $\alpha = 1.1$ | $T_w = 22$ | |
| 13 | 2 | 1 | 1 | 0 | 1 | 2 | 1 | q=15 | | 2 | 40 | 3 | q=-3 | | |