АФІННА КРИВИНА ГЕОДЕЗИЧНОЇ НА АФІННІЙ ГІПЕРСФЕРІ

Шугайло О. О.

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, Харків, Україна.

Розглядаються афінні занурення гіперповерхонь у сенсі К. Номідзу, Т. Сасакі [1]. Відомо, що властивості оператора Вейнгартена залежать від вибору трансверсального розподілу, однак ми виділяємо окремі класи занурень, які мають спільні властивості оператора Вейнгартена. Одним з таких класів є омбілічні занурення [2]. Добре вивченими є власні та невласні афінні сфери (омбілічні гіперповерхні з афінною нормаллю Бляшке), а також центро-афінні гіперповерхні. Вивчалися також омбілічні занурення ковимірності два, які є частковим випадком центро-афінних занурень [3-5].

Нагадаємо декілька визначень [1].

Афінна гіперповерхня зі *структурою Бляшке* називається афінною *гіперсферою*, якщо її оператор Вейнгартена має вигляд $S=\lambda\cdot I$, де λ=const, I – тотожній оператор. Якщо $\lambda\neq 0$, то гіперповерхня називається власною афінною гіперсферою, якщо λ=0 – невласною афінною гіперсферою. (Зауважимо, що нормаль Бляшке ξ для невиродженої гіперповерхні визначається однозначно з точністю до знака)

Гіперповерхня називається *центро-афінною*, якщо її радіус-вектор трансверсальний дотичному простору в кожній точці. Інакше кажучи, афінне занурення $f:M^n\to \mathrm{R}^{n+1}$ з радіусом-вектором занурення $\vec r$ та трансверсальним розподілом $\xi=-\vec r$ називається центро-афінним. Очевидно, що для центро-афінного занурення оператор Вейнгартена має вигляд *S=I*.

Аффінне занурення $f:(M^n,\nabla)\to \mathrm{R}^{n+1}$ називається *омбілічним*, якщо існує трансверсальне векторне поле ξ, яке індукує задану зв'язність та таке, що оператор Вейнгартена має вигляд $S=\lambda\cdot I$, де λ – гладка функція.

Добре відома теорема про те, що *гіперповерхня зі структурою Бляшке є афінною гіперсферою тоді і тільки тоді, коли всі її геодезичні є плоскими* [1].

Аналогічно можна довести наступну теорему.

Теорема. *Невироджене афінне занурення* $f:(M^n,\nabla)\to \mathrm{R}^{n+1}$ *є афінним омбілічним зануренням тоді і тільки тоді, коли всі* ∇*-геодезичні є плоскими.*

Для центро-афінних гіперповерхонь ця умова є необхідною, але не є достатньою.

Зв'язність, яка індукована на афінній гіперсфері, на центро-афінній гіперповерхні, або задана на афінній омлілічній гіперповерхні є еквіафінною, тобто індукований елемент об'єму $\theta(X_1,...X_n)=|f_*(X_1),...f_*(X_n),\xi|$ є паралельним в цій зв'язності.

Якщо ми будемо розглядати тільки еквіафінні перетворення, тобто перетворення, які сберігають об'єм, то ми можемо говорити про афинну кривину кривої.

Отримаємо формулу для обчислення афінної кривини геодезичної на афінній гіперсфері в термінах афіної фундаментальної форми поверхні.

Нехай занурення $f:M^n\to \mathrm{R}^{n+1}$ є власною афінною гіперсферою, тобто $S=\lambda\cdot I$, де λ=const, Нехай $\vec\rho(t)\in R^{n+1}$ – довільна геодезична на даній гіперсфері. Позначимо через $\vec t_1,\vec t_2$ – базис тієї площини α в R^{n+1}, в якій лежить дана геодезична. А через $\vec n$ позначимо сталий мультивектор $\vec n=\{\vec n_1,...,\vec n_{n-1}\}$, який задовольняє умові: $|\vec t_1,\vec t_2,\vec n|=1$. Таким чином, для векторів $\vec a=a^1\vec t_1+a^2\vec t_2$, $\vec b=b^1\vec t_1+b^2\vec t_2$, які належать площині α ми визначаємо індукований елемент об'єму наступним чином: $|\vec a,\vec b|_\alpha=|\vec a,\vec b,\vec n|$.

Нехай $\vec\rho_t'=f_*(X)$, ξ – нормаль Бляшке, h – афінна фундаментальна форма гіперсфери. Враховуючи, що $\nabla_X X=0$, $\vec\rho_t'=f_*(X)$, $\vec\rho_t''=D_X f_*(X)=h(X,X)\xi$ і $\vec\rho_t'''=D_X(h(X,X)\xi)=$ $=X(h(X,X))\xi+h(X,X)(-\lambda f_*(X))$, та застосовуючи формулу для обчислення афінної кривини плоскої кривої в довільній параметризації, отримуємо наступну формулу: $k=$

$$\frac{-5(X(h(X,X)))^2+3\,h(X,X)\,\partial_X^2 h(X,X)+9\lambda h^3(X,X)}{9\,h^{\frac{8}{3}}(X,X)\cdot|f_*(X),\xi,\vec{\mathrm{n}}|^{\frac{2}{3}}}$$

Недоліком цієї формули є те, що для кожної геодезичної потрібно визначати свій індукований елемент об'єму площини, якій належить геодезична, тобто свій сталий мультивектор $\vec n$. Але оскільки $X(|f_*(X),\xi,\vec{\mathrm{n}}|)=0$, то є можливість порівнювати афінні кривини різних геодезичних з точністю до додатного сталого множника.

Наведена формула є справедливою для невласних афінних гіперсфер (при λ=0), для центро-афінних гіперповерхонь (при λ=1) та афінних омбілічних гіперповерхонь (де λ – функція).

ЛІТЕРАТУРА

1. Nomizu K., Sasaki T. Affine differential geometry. – Cambridge University Press, 1994. – 264 p.
2. Шугайло Е. А. Об аффинных омбилических погружениях высокой коразмерности. // Proc. Intern. Geom. Center. – 2013. – V. 6, № 3. – с. 26-39.
3. Magid M., Scharlach C., Vrancken L. Affine umbilical surfaces in R^4. // Manuscripta Math. – 1995. – № 88. – p. 275-289.
4. Verstraelen L., Vrancken L., Witowich P. Indefinite affine umbilical surfaces in R^4. // Geometriae Dedicata. – 2000. – № 79. – p. 109-119.
5. Nomizu K., Sasaki T.Centroaffine immersions of codimension two and projective hypersurface theory. // Nagoya Math. J. – 1993. – V. 132. – p. 63-90.