СИНТЕЗ ОГРАНИЧЕННЫХ УПРАВЛЕНИЙ ДЛЯ КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ НЕУПРАВЛЯЕМЫХ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ СИСТЕМ

Бебия М. О.

ХНУ имени В.Н. Каразина, Харьков, Украина

В работе рассматривается нелинейная система вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \quad |u| \le d, \\ \dot{x}_i = x_{i-1}, \quad i = 2,\dots,n-1, \\ \dot{x}_n = x_{n-1}^{2k+1}, \end{cases} \qquad (1)$$

где $u \in \Re$ – управление, $k = \frac{p}{q}$ ($p > 0$ – целое число, $q > 0$ – нечетное число), $d > 0$ – некоторое заданное число.

Задача синтеза ограниченных управлений для системы (1) состоит в построении ограниченного управления $u = u(x)$ ($|u(x)| \le d$) такого, что траектория $x(t, x_0)$ замкнутой системы (1), выходящая из произвольной начальной точки $x_0 \in Q \subset \Re^n$, оканчивается в нуле в некоторый конечный момент времени $T(x_0)$.

Основной трудностью при исследовании задачи синтеза для системы (1) является тот факт, что эта система неуправляема по первому приближению. Задача стабилизации системы (1) решена в работе [2]. В работе [1] был построен класс управлений, решающих задачу синтеза для системы (1). В настоящей работе класс таких управлений существенно расширен.

Решение задачи синтеза получено на основе метода функции управляемости [3]. Определим функцию управляемости $\Theta_\alpha(x)$ при $x \ne 0$ как единственный положительный корень уравнения

$$2a_0 \Theta_\alpha^{\frac{2m-1}{\alpha}+1} = (FD(\Theta_\alpha)x, D(\Theta_\alpha)x), \qquad (2)$$

где $a_0 > 0$, $\alpha > 1$ – фиксированные числа, F – некоторая положительно определенная матрица, $D(\Theta_\alpha) = diag(\Theta_\alpha^{\frac{m-1}{\omega}}, .., \Theta_\alpha^{\frac{m-n+1}{\omega}}, 1)$ – диагональная $n \times n$ матрица, $m = 2k(n-1) + n + k(\alpha - 1)$. Положим $\Theta(0) = 0$.

Введем в рассмотрение диагональную $n \times n$ матрицу $H^\alpha = diag(\frac{m-1}{\omega}, .., \frac{m-n+1}{\omega}, 0)$. Выберем $\alpha > 1$ из условия положительной определенности матрицы $F^\alpha = (\frac{2m-1}{\alpha} + 1)F - H^\alpha F - FH^\alpha$. В этом случае уравнение (2) имеет единственное положительное решение $\Theta_\alpha(x)$, более того, функция $\Theta_\alpha(x)$ – непрерывна всюду и непрерывно дифференцируема при $x \ne 0$.

Определим управление $u_\alpha(x)$ формулой

$$u_\alpha(x) = \frac{1}{\Theta_\alpha^{\frac{m}{\alpha}}(x)}(a, D(\Theta_\alpha(x))) + a_{n+1}\frac{x_{n-1}^{2k+1}}{\Theta_\alpha^{\frac{m-1}{\alpha}}(x)}, \qquad (3)$$

где $a = (a_1, \dots, a_n)$. Выберем $a_i < 0, i = 1, \dots, n$ так, чтобы матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

была устойчива. Матрицу $F = \{f_{ij}\}_{i,j=1}^n$ определим, как произвольное положительно определенное решение сингулярного неравенства Ляпунова [2] $A^* F + FA \le 0$. Положим $a_{n+1} = -\frac{f_{nn}}{f_{1n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_n} < 0$.

Пусть a_0 удовлетворяет условию $0 < a_0 \le a_0^*$, где a_0^* положительный корень уравнения

$$\sqrt{\frac{2a_0}{\lambda_{\min}(F)}} \cdot \left(\|a\| - a_{n+1} \left(\frac{2a_0}{\lambda_{\min}(F)} \right)^k \right) = d,$$

где $\lambda_{\min}(F)$ – минимальное собственное значение матрицы F. Тогда управление $u_\alpha(x)$ вида (3) удовлетворяет ограничению $|u_\alpha(x)| \le d$ в области $Q_\alpha = \{x \in \Re : \Theta_\alpha(x) \le 1\}$.

В работе найдена такая константа $\bar{a}_0 \le a_0^*$, что производная функции управляемости в силу системы (1), замкнутой управлением $u = u_\alpha(x)$ вида (3), удовлетворяет условию

$$\dot{\Theta}_\alpha(x(t)) \le -\beta\, \Theta_\alpha(x)^{1-\frac{1}{\alpha}}, \ \beta > 0$$

при любом a_0 таком, что $0 < a_0 \le \bar{a}_0$. Тогда, согласно методу функции управляемости [3], управление $u = u_\alpha(x)$ вида (3) решает задачу синтеза для системы (1) и время попадания $T(x_0)$ из произвольной начальной точки $x_0 \in Q_\alpha$ в точку $x_1 = 0$ удовлетворяет ограничению $T(x_0) \le \frac{\alpha}{\beta}\Theta_\alpha^{\frac{1}{\alpha}}(x_0)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bebiya M. O. Global synthesis of bounded controls for systems with power nonlinearity. // Visn. Khark. Univ., Ser. Mat, Prykl. Mat. Mekh. - 2015. - Vol. 81. - P. 36-51.
2. Бебия М. О. Стабилизация систем со степенной нелинейностью. // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія "Математика, прикладна математика і механіка". – 2014. – т. 69, № 1120, С. 75-84.
3. Коробов В. И. Метод функции управляемости. – М.-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2007. – 576 с.