УСРЕДНЕНИЕ НА ПСЕВДО-ТРАЕКТОРИЯХ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Осипенко Г. С.

Московский государственный университет, Россия

Рассмотрим дискретную динамическую систему порожденную диффеоморфизмом f на компактном многообразии M. Последовательность точек $\{x_n\}$ является траекторией, если $f(x_n)=x_{n+1}$; последовательность $\{x_n\}$ называется ε-траекторией, ε>0, если расстояние $\rho(f(x_n), x_{n+1})<\varepsilon$. В реальных вычислениях мы имеем дело только с ε-траекториями для достаточно малых ε. Так компьютер считает с точностью 10^{-19}, учитывая большое количество операций, ε может достигать и более существенных значений. Пусть φ – непрерывная функция на M. Усреднением функции φ на положительной полутраектории $\{x_n, n>0\}$ называется предел

$$\bar{\varphi} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi(x_k),$$

если он существует. Теорема Бирккгофа [1] утверждает, что предел существует для почти любого начального данного по любой инвариантной мере и более того этот предел совпадает с усреднением на отрицательной полутраектории. Иначе говоря, множество точек, для которых предел не существует, имеет меру 0 для любой инвариантной меры. В работах [2, 3] показано, как построить все инвариантные меры. Например, рассмотрим окружность M, отображение f имеет две неподвижные точки – S и N, остальные траектории двигаются против часовой стрелки по окружности от одной неподвижной точки до другой. В этом случае существуют две инвариантные эргодические меры, сосредоточенные в неподвижных точках, остальные меры являются линейной оболочкой над эргодическими мерами. Множество M\(N,S) имеет меру 0 для любой инвариантной меры. Теорема Биркгофа гарантирует, что усреднения существуют для неподвижных точек, что очевидно. Однако можно показать, что усреднения на любых полутраекториях всегда существуют и принимают только два значения φ(S) и φ(N).

Усреднением функции φ на конечной последовательности $\{x_k, 0<k<n\}$ называется число

$$\varphi_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi(x_k)$$

.

Спектром усреднения на траекториях динамической системы называется предельное множество Σ конечных усреднений на траекториях системы при n→∞, т.е.

$$\Sigma=\{\lambda \mid \lambda=\lim \varphi_n,\ n=m_k\to\infty\}.$$

В рассмотренном примере спектр состоит из двух значений φ(S) и φ(N). Рассмотрим аналогичное усреднение для ε-траекторией и обозначим Σ(ε) предельное множество для таких усреднений. Спектром усреднений на псевдо-траекториях назовем множество

$$\Sigma(0)=\lim\Sigma(\varepsilon),\ \text{при}\ \varepsilon\to 0.$$

Ясно, что Σ лежит в Σ(0). В нашем примере, Σ(0) является отрезком [φ(S), φ(N)], при φ(S)<φ(N) или отрезком [φ(N), φ(S)], при φ(N)< φ(S).

Точка x называется цепно-рекуррентной, если через нее проходит периодическая ε-траектория для любого ε>0. В примере, все точки окружности являются цепно-рекуррентными, т.к. неподвижные точки являются проходящими. Множество цепно-рекуррентных точек образует цепно-рекуррентное множество. Компонентой цепно-рекуррентного множества называется множества точек, каждая пара которых может быть соединена периодической ε-траекторией, для любого ε>0. В нашем примере, имеется всего одна компонента, которая совпадает с окружностью.

Теорема. *Спектр Σ(0) состоит из отрезков [a,b], каждый отрезок порожден компонентой цепно-рекуррентного множества Ω, a=min{ ∫φdμ | μ – эргодическая мера с носителем в Ω} и b=max{ ∫φdμ | μ – эргодическая мера с носителем в Ω}.*

Например, для нашей динамической системы рассмотрим на функцию $\varphi(x)=\ln|\partial f(x)|$. Так как неподвижные точки полу-устойчивы, то в этих точках $\ln|\partial f(S)|= \ln|\partial f(N)|=0$ и спектр Σ(0) состоит из одного нуля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Katok A., Hasselblat B. Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems. -- Cambridge University Press, 1995

2. Osipenko G. Dynamical systems, Graphs, and Algorithms. -- Lectures Notes in Mathematics, v. 1889, Springer, Berlin, 2007.

3. Osipenko G. Symbolic images and invariant measures of dynamical systems. \\ Ergodic Theory and Dynamical Systems, v. 30 (2010), 1217 – 1237.

e-mail: george.osipenko@mail.ru