ПОШАГОВОЕ УСРЕДНЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ ПЕРЕМЕННОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Плотников А.А.

Одесский национальный университет им. И.И. Мечникова, Одесса, Украина.

Пусть $Conv(R^n)$ - семейство всех непустых компактных и выпуклых подмножеств пространства R^n с метрикой Хаусдорфа.

Пусть $n: R_+ \to N$ - кусочно-постоянная функция, непрерывная справа и ограниченная константой $\overline{n} \geq 1$ для всех $t \in R_+$.

Предположение. Предположим, что множество всех точек разрыва функции $n(\cdot)$ на любом сегменте $I \subset R_+$ конечно.

Рассмотрим следующее семейство линейных дифференциальных включений [2]

$$\dot{x}_i \in \varepsilon[A_i(t)x_i + F_i(t)],\ t \in [\tau_i, \tau_{i+1}), i = \overline{0,\infty}, \qquad (1)$$

$$x_0(0) = \overline{x}_0,\ x_i(\tau_i) = M_i x_{i-1}(\tau_i - 0),\ i = \overline{1,\infty}, \qquad (2)$$

где ε - малый параметр; $\tau_i \in R_+$, $i = \overline{1,\infty}$ - моменты времени $(\tau_i < \tau_{i+1})$ такие, что $n(\tau_i - 0) \neq n(\tau_i)$; $x_i(t) \in R^{n(\tau_i)}, t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$; $A_i(t) : [\tau_i, \tau_{i+1}) \to R^{n(\tau_i)\times n(\tau_i)}$ - матричная функция; $F_i : [\tau_i, \tau_{i+1}) \to Conv(R^{n(\tau_i)})$ - многозначное отображение; $\tau_0 = 0$; $i = \overline{0,\infty}$; M_i - матрица $(n(\tau_i) \times n(\tau_i - 0))$, $i = \overline{1,\infty}$.

Наряду с системой (1),(2) будем рассматривать следующую систему

$$\dot{x} \in \varepsilon[N(n(t))A(t)x + N(n(t))F(t)],\ t \neq \tau_i,\ i = \overline{1,\infty}, \qquad (3)$$

$$x(0) = x_0,\ x(\tau_i) = M(n(\tau_i))x(\tau_i - 0),\ i = \overline{1,\infty}, \qquad (4)$$

где $x(t) \in R^{\overline{n}}$; $E(n(t))$ - единичная матрица $(n(t) \times n(t))$; $N(n(t))$, $M(n(t))$ - матричные функции $(\overline{n} \times \overline{n})$ такие, что

$$N(n(t)) = \begin{pmatrix} E(n(t)) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M(n(t)) = M(n(\tau_i)) = \begin{pmatrix} M_i & 0 \\ 0 & E(\overline{n} - n(\tau_i)) \end{pmatrix}, t \in [\tau_i, \tau_{i+1});$$

$P(n(t))$ - матричная функция $(n(t) \times \overline{n})$ такая, что $P(n(t)) = (E(n(t),0)$; $A(t)$ - матричная функция $(\overline{n} \times \overline{n})$ такая, что $N(n(t))A(t) = P^T(n(t))A_i(t)P(n(t))$, $F : R_+ \to Conv(R^{\overline{n}})$ - многозначное отображение такое, что $N(n(t))F(t) = P^T(n(t))F_i(t)$ для всех $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = \overline{0,\infty}$; $N(n(0))x_0 = P^T(n(0))\overline{x}_0$.

Определение [1]. Вектор-функция $x : R_+ \to R^{\overline{n}}$ называется решением системы (3), (4), если она абсолютно непрерывна, удовлетворяет дифференциальному включению (3) почти всюду на интервалах, которые не содержат τ_i и удовлетворяет условию (4) в точках $t = \tau_i$.

Замечание 1. *Очевидно, что первые* $n(t)$ *элементов вектора* $x(t)$ *совпадает со всеми элементами вектора* $x_i(t)$ *для всех* $t \geq 0$.

Замечание 2. *К таким системам сводятся управляемые процессы возникновения и развития объектов, дифференцированных по моменту создания, управляемые гибридные системы и управляемые системы с переменной размерностью [1]. Если* $n(t) \equiv n$, *то система (3), (4) является обычным линейным дифференциальным включением.*

Через X обозначим множество решений системы (3), (4), через $X(t)$ - его сечение в момент t.

Возьмем некоторое $\omega > 0$. Обозначим через Γ множество точек пространства R_+ таких, что $\gamma_i = i\,\omega, i = \overline{0,\infty}$, а через Υ множество точек τ_i. Обозначим через Ξ множество точек t_i, $i = \overline{0,\infty}$ таких, что $\Xi = \Gamma \cup \Upsilon$.

Поставим в соответствие системе (27),(28) следующую усредненную систему

$$\dot{y} \in \varepsilon[N(n(t))\overline{A}(t)y + N(n(t))\overline{F}(t)],\ t \neq \tau_i,\ i = \overline{1,\infty}, \qquad (5)$$

$$y(0) = x_0,\ y(\tau_i) = M(n(\tau_i))y(\tau_i - 0),\ i = \overline{1,\infty}, \qquad (6)$$

где

$$\overline{A}(t) = \{A_i : A_i = \frac{1}{t_{i+1} - t_i}\int_{t_i}^{t_{i+1}} A(s)ds, t \in [t_i, t_{i+1}), i = \overline{0,\infty}\}$$

$$\overline{F}(t) = \{F_i : F_i = \frac{1}{t_{i+1} - t_i}\int_{t_i}^{t_{i+1}} F(s)ds, t \in [t_i, t_{i+1}), i = \overline{0,\infty}\}$$

Теорема. *Пусть выполняются следующие условия:*

1) $A(t)$ *- непрерывна на* $R_+ \setminus \Upsilon$ *и непрерывна справа в* $t \in \Upsilon$;

2) $F(t)$ *- непрерывно на* $R_+ \setminus \Upsilon$ *и непрерывно справа в* $t \in \Upsilon$;

3) существует $\alpha > 0$ *такое, что* $\|N(n(t))A(t)\| \leq \alpha$, $\|N(n(t))F(t)\| \leq \alpha$ *для всех* $t \geq 0$;

4) существует $0 < \lambda < 1$ *такое, что* $\|M(n(t))\| \leq \lambda$ *для всех* $t \geq 0$;

Тогда для любого L > 0 существуют $\varepsilon_0(L) > 0$ *и C(L) > 0 такие, что для всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *и* $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ *справедливо неравенство* $h(X(t), Y(t)) < C\varepsilon$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kichmarenko O.D., Plotnikov A.A. The averaging of control linear differential equations with variable dimension on finite interval // International Journal of Sensing, Computing and Control. – 2015. – v. 5, №1. – P. 25–35.
2. Kichmarenko O.D., Plotnikov A.A. The averaging of linear differential inclusions with variable dimension on finite interval // International Journal of Nonlinear Science. – 2015. – v. 20, № 2. – P. 67–78.