РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РОБАСТНОГО ПОЗИЦИОННОГО СИНТЕЗА В СЛУЧАЕ НЕСКОЛЬКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Ревина Т. В.

ХНУ им. В. Н. Каразина, Харьков, Украина

В настоящей работе рассматривается задача робастного позиционного синтеза для системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = (A_0 + R(t,x))x + b_0 u, \qquad (1)$$

где x – фазовый n - мерный вектор; u – скалярное управление, удовлетворяющее ограничению $|u| \le 1$; A_0 - матрица, элементы главной наддиагонали которой равны 1, а остальные нулевые; b_0 – вектор, у которого последний элемент равен 1, а остальные элементы нулевые; $R(t,x) = (r_{ij}(t,x))_{i,j=1}^{n}$, $r_{ij}(t,x) = 0$, $j > i+1$ - неизвестное ограниченное возмущение, элементы которого удовлетворяют ограничению $\max |r_{ij}(x,t)| \le \delta$. Такие системы называют робастными [1]. При $R(t,x) \equiv 0$ система (1) называется канонической. В рассматриваемом нами подходе она занимает центральное место так как решение задачи синтеза для произвольной линейной системы с одномерным управлением может быть сведено к решению задачи синтеза для канонической системы [2]. При $R(t,x) \equiv 0$ система (1) является полностью управляемой. В работе [2] дано управление $u(x)$, решающее задачу синтеза для канонической системы. Наша цель – найти такое δ, при котором траектория $x(t)$ системы

$$\dot{x} = (A_0 + R(t,x))x + b_0 u(x), \qquad (2)$$

выходящая из произвольной начальной точки x_0, оканчивается в точке $x_1 = 0$ в некоторый конечный момент времени. В работе [3] рассмотрено решение поставленной задачи при условии, что возмущение входит только в первое уравнение. В работе [4] рассмотрен случай, при котором у всех возмущений можно вынести общую функцию, т. е. $r_{ij}(x,t) = p(t,x) r_{ij}$. В этой работе рассматривается более общий случай возмущений.

Решение проводится на основе метода функции управляемости В. И. Коробова [2]. Обозначим матрицы

$$F = \left(\int_0^1 (1-t) e^{-A_0 t} b_0 b_0^* e^{-A_0^* t} dt \right)^{-1},$$

$$D(\Theta) = diag \left(\Theta^{-\frac{2n-2i+1}{2}} \right)_{i=1}^{n}.$$

Функция управляемости [2] $\Theta = \Theta(x)$ определяется как положительное решение уравнения

$$2a_0 \Theta = (D(\Theta) F D(\Theta) x, x), \quad x \neq 0, \quad \Theta(0) = 0, \qquad (3)$$

где постоянная a_0 удовлетворяет ограничению $0 < a_0 < 2 / f_{nn}$. Управление задается формулой

$$u(x) = -b_0^* D(\Theta) F D(\Theta) x / 2 \qquad (4)$$

Обозначим
$S = \Theta(FD(\Theta) R D^{-1}(\Theta) + D^{-1}(\Theta) R^* D(\Theta) F)$,
$H = diag\big(-(2n-2i+1)/2\big)_{i=1}^{n}$, $F^1 = F - FH - HF$,
$y = D(\Theta)x$, $\widetilde{R}_0 = A_0$, $\widetilde{R}_1 = I$ (единичная матрица), элементы матрицы $\widetilde{R}_i$, стоящие на $i-1$ главной поддиагонали равны 1, а остальные равны нулю,

$$\widetilde{G} = |(F^1)^{-1}| \sum_{i=0}^{n} (|F\widetilde{R}_i| + \widetilde{R}_i^* F).$$

Пусть $\rho(\widetilde{G})$ обозначает спектральный радиус матрицы $\widetilde{G}$.

Полная производная функции управляемости в силу возмущенной системы (1) имеет вид

$$\dot{\Theta} = -1 + \frac{(Sy,y)}{(F^1 y,y)} \le -1 + \lambda_{\max}((F^1)^{-1} S).$$

Зададим $0 < \gamma < 1$ и потребуем, чтобы $\dot{\Theta} \le -\gamma$.

Так как [5] $\lambda_{\max}((F^1)^{-1}S) \le \rho((F^1)^{-1}S) \le \delta\rho(\widetilde{G})$, то справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $\delta = \dfrac{1-\gamma}{\rho(\widetilde{G})}$. *Пусть функция управляемости* $\Theta(x)$ *есть положительное решение уравнения (3), а управление задается формулой (4). Тогда траектория системы (2), выходящая из произвольной начальной точки* $x_0 \in Q = \{x : \Theta(x) \le 1\}$, *оканчивается в точке* $x_1 = 0$ *в некоторый конечный момент времени* $T(x_0) \le \Theta(x_0) / \gamma$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Поляк Б. Т., Щербаков П. С. Робастная устойчивость и управление. - М.: Наука. - 2002, 303 с.
2. Коробов В. И. Метод функции управляемости. – М.-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика". - 2007. – 576 с.
3. Korobov V. I., Revina T. V. Robust feedback synthesis problem for systems with a single perturbation // Communications in Mathematical Analysis. - 2014. - 17, no. 2. - pp. 217 - 230.
4. Коробов В. И., Ревина Т. В. Решение задачи робастного позиционного синтеза для канонической системы // Доповіді Національної академії наук України, рубрика Математика. - 2015. - №6. – С. 13-18.
5. Хорн Р. А, Джонсон Ч. Р., Матричный анализ. – М.: Мир, пер. с англ. Под ред Х. Д. Икрамова. – 1989. – 656с.