АППРОКСИМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ОБОБЩЕННЫХ Fup-ФУНКЦИЙ

Брысина И.В., Макаричев В.А.

Национальный аэрокосмический университет имени Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина

Одним из наиболее интенсивно развивающихся направлений развития математики является построение и исследование функций с компактным носителем таких, как сплайны и вейвлеты. Различные системы функций с компактным носителем находят широкое применение в численных методах, математической физике, теории приближений, цифровой обработке сигналов и изображений. В частности, подобные системы используются при численном решении дифференциальных уравнений. При этом зачастую их решения являются функциями высокой гладкости. В связи с этим актуальным является вопрос о построении пространств функций L которые бы сочетали следующие важные свойства: все элементы пространства L являются бесконечно дифференцируемыми, в пространстве L имеется базис, состоящих из функций с компактным носителем, и пространства L обладают хорошими аппроксимационными свойствами.

В работе [1] были предложены и исследованы обобщенные Fup-функции.

Рассмотрим функцию $f(x)$ такую, что

1) $\mathrm{supp}\, f(x) = [-1,1]$,
2) $f(x)$ - четная функция,
3) $f(x) \ge 0$ на отрезке $[-1,1]$,
4) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Далее функцию вида

$$f_{N,m}(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\left(\frac{\sin(t/N)}{t/N}\right)^{m+1} F\left(\frac{t}{N}\right)dt,$$

где $F(t)$ - преобразование Фурье функции $f(x)$, $N \ne 0$ и $m \in \mathbb{N}$, будем называть обобщенной Fup-функцией.

Пусть

$$f_{N,m,k}(x) = f_{N,m}\left(\frac{x}{\pi} - \frac{2k-m-2+N}{N}\right) + $$
$$+ f_{N,m}\left(\frac{x}{\pi} - \frac{2k-m-2-N}{N}\right)$$

для всех $k = 1,2,\ldots,m+1$ и

$$f_{N,m,k}(x) = f_{N,m}\left(\frac{x}{\pi} - \frac{2k-m-2-N}{N}\right)$$

для всех $k = m+2,\ldots,N$.

Обозначим через $L_{N,m}$ пространство функций вида

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k \cdot f_{N,m,k}(x),\ x \in [-\pi,\pi].$$

Пусть также $E_X(A,L)$ - величина наилучшего приближения множества A множеством L по норме пространства X. Кроме того, пусть $\tilde{W}_2^r$ - класс функций $g \in C_{[-\pi,\pi]}^{r-1}$ таких, что $g^{(k)}(-\pi) = g^{(k)}(\pi)$ для любого $k = 0,1,\ldots,r-1$, $g^{(r-1)}(x)$ является абсолютно непрерывной и $\left\| g^{(r)} \right\|_{L_2[-\pi,\pi]} \le 1$.

Теорема. *Если* $m+1 \ge r$*, то найдется такое число* $M \ge 0$*, что*

$$E_{L_2[-\pi,\pi]}\left(\tilde{W}_2^r, L_{N,m}\right) \le \left(\frac{N}{2}\right)^{-r}\sqrt{1+\varepsilon},$$

где $\varepsilon = \frac{M^2}{2^{4m+3}} + \frac{M}{2^{2m+1}} + \frac{\sqrt{2M}}{2^{m+r+1}}$.

Данное утверждение является обобщением теорем о приближении функций классов $\tilde{W}_2^r$ пространствами линейных комбинаций сдвигов атомарных функций $\mathrm{up}(x)$ и $\mathrm{mup}_s(x)$ по норме $L_2[-\pi,\pi]$.

Следует отметить, что функции $f_{N,m}(x)$ являются обобщением функций $\mathrm{Fup}_n(x)$ [2,3], которые нашли свое применение в [4-6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Brysina I.V., Makarichev V.A. On the asymptotics of the generalized Fup-functions // Adv. Pure Appl. Math. – 2014. – no. 5. – pp. 131-138.
2. Рвачев В.Л., Рвачев В.А. Неклассические методы теории приближений в краевых задачах. – К.: Наук. думка, 1979. – 196 с.
3. Рвачев В.А. Финитные решения функционально-дифференциальных уравнений и их применения. // УМН. - 1990. - т. 45, вып. 1(271). - С. 77-103.
4. Gotovac H., Andricevic R., Gotovac B. Multi-resolution adaptive modeling of groundwater flow and transport problems. // Adv. Water Resour. – 2007. – no. 30. – pp. 1105-1126.
5. Gotovac H., Cvetkovic V., Andricevic R. Adaptive Fup multi-resolution approach to flow and advective transport in heterogeneous porous media. // Adv. Water Resour. – 2009. – no. 32. – pp. 885-905.
6. Gotovac H., Gotovac B. Maximum entropy algorithm with inexact upper entropy bound based on Fup basis functions with compact support. // J. Comput. Phys. – 2009. – no. 228. – pp. 9079-9091.