Аппроксимационные свойства обобщенных *Fup*–функций

Брысина И.В., Макаричев В.А.

Национальный аэрокосмический университет имени Н.Е. Жуковского "ХАИ"

Харьков, 2016

Функция $mup_s(x)$ и ее свойства

Рассмотрим функцию

$$mup_s(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{st}{(2s)^k}\right)}{s^2 \frac{t}{(2s)^k} \sin\left(\frac{t}{(2s)^k}\right)} dt, \quad s \in \mathbb{N}.$$

Эта функция обладает свойствами:
1) функция $mup_s(x)$ является решением уравнения

$$y'(x) = 2 \sum_{k=1}^{s} (y(2sx + 2s - 2k + 1) - y(2sx - 2k + 1));$$

2) $supp\ mup_s(x) = [-1, 1]$;
3) $mup_s(x) \in C^\infty$.

Пространства $MUP_{s,n}$

Пусть $MUP_{s,n}$ — пространство функций вида

$$\psi(x) = \sum_k c_k \cdot mup_s\left(x - \frac{k}{(2s)^n}\right),\ x \in [-1, 1].$$

Пространства $MUP_{s,n}$

Пусть $MUP_{s,n}$ — пространство функций вида

$$\psi(x) = \sum_k c_k \cdot mup_s\left(x - \frac{k}{(2s)^n}\right),\ \ x \in [-1, 1].$$

Теорема 1 ([1] для случая $s = 1$, [2] для случая $s \geq 2$). Для любого $n = 0, 1, 2, \ldots$ существуют коэффициенты $\{v_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ такие, что

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} v_j \cdot mup_s\left(x - \frac{j}{(2s)^n}\right) \equiv x^n.$$

[1] Рвачев В.Л., Рвачев В.А. Неклассические методы теории приближений в краевых задачах. — К.: Наук. думка, 1979.

[2] Макаричев В.А. Приближение периодических функций с помощью $mup_s(x)$ // Матем. заметки. — т. 93, вып. 6. — 2013. — С. 878 – 901.

Пространства $MUP_{s,n}$

Теорема 2 ([1], [2]). Система функций

$$\left\{ Fmup_{s,n}\left(x - \frac{j}{(2s)^n} + 1 + \frac{n+2}{2(2s)^n}\right)\right\}_{j=1}^{2(2s)^n+n+1}$$

образует базис пространства $MUP_{s,n}$, где

$$Fmup_{s,n}(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\left(\frac{\sin\left(\frac{t}{2(2s)^n}\right)}{\frac{t}{2(2s)^n}}\right)^n F_s\left(\frac{t}{(2s)^n}\right) dt,$$

$F_s(t)$ — преобразование Фурье функции $mup_s(x)$.

Теорема 3 ([1], [2]).

$$supp\ Fmup_{s,n}(x) = \left[-\frac{n+2}{2(2s)^n}, \frac{n+2}{2(2s)^n}\right].$$

Пространства $\widetilde{MUP}_{s,n}$

Обозначим через $\widetilde{MUP}_{s,n}$ пространство функций вида

$$\psi(x) = \sum_k c_k \cdot mup_s\left(\frac{x}{\pi} - \frac{k}{(2s)^n}\right), \quad x \in [-\pi, \pi]$$

таких, что $\psi^{(j)}(-\pi) = \psi^{(j)}(\pi)$ для любого $j = 0, 1, 2, \ldots$, а через $\widetilde{W}_2^r$ — класс функций $f \in C_{[-\pi,\pi]}^{r-1}$ таких, что $f^{(k)}(-\pi) = f^{(k)}(\pi)$ для любого $k = 0, 1, \ldots, r-1$, $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна и $\left\|f^{(r)}\right\|_{L_2[-\pi,\pi]} \leq 1$.

Пространства $\widetilde{MUP}_{s,n}$

Обозначим через $\widetilde{MUP}_{s,n}$ пространство функций вида

$$\psi(x) = \sum_k c_k \cdot mup_s\left(\frac{x}{\pi} - \frac{k}{(2s)^n}\right), \; x \in [-\pi, \pi]$$

таких, что $\psi^{(j)}(-\pi) = \psi^{(j)}(\pi)$ для любого $j = 0, 1, 2, \ldots$, а через $\widetilde{W}_2^r$ — класс функций $f \in C^{r-1}_{[-\pi,\pi]}$ таких, что $f^{(k)}(-\pi) = f^{(k)}(\pi)$ для любого $k = 0, 1, \ldots, r-1$, $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна и $\left\|f^{(r)}\right\|_{L_2[-\pi,\pi]} \leq 1$.

Пусть $E_X(A, L) = \sup\limits_{\varphi \in A} \inf\limits_{\psi \in L} \|\varphi - \psi\|_X$

Пространства $\widetilde{MUP}_{s,n}$

Обозначим через $\widetilde{MUP}_{s,n}$ пространство функций вида

$$\psi(x) = \sum_k c_k \cdot mup_s\left(\frac{x}{\pi} - \frac{k}{(2s)^n}\right), \; x \in [-\pi, \pi]$$

таких, что $\psi^{(j)}(-\pi) = \psi^{(j)}(\pi)$ для любого $j = 0, 1, 2, \ldots$, а через $\widetilde{W}_2^r$ — класс функций $f \in C_{[-\pi,\pi]}^{r-1}$ таких, что $f^{(k)}(-\pi) = f^{(k)}(\pi)$ для любого $k = 0, 1, \ldots, r-1$, $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна и $\left\|f^{(r)}\right\|_{L_2[-\pi,\pi]} \leq 1$.

Пусть $E_X(A, L) = \sup\limits_{\varphi \in A} \inf\limits_{\psi \in L} \|\varphi - \psi\|_X$

и $d_N(A, X) = \inf\limits_{dim\ L = N} E_X(A, L)$ — N-поперечник по А.Н. Колмогорову.

Аппроксимационные свойства

Теорема 4 ([1], [2]). Размерность пространства $\widetilde{MUP}_{s,n}$ составляет $2(2s)^n$.

Теорема 5 ([3]). При $n \geq n(r)$ выполняется равенство

$$E_{L_2[-\pi,\pi]}(\widetilde{W}_2^r, \widetilde{MUP}_{1,n}) = d_{2^{n+1}}(\widetilde{W}_2^r, L_2[-\pi,\pi]).$$

Теорема 6 ([2]). Для любого $s \geq 2$ существуют числа $C(r) \geq 0$ и $n(r) \geq 0$ такие, что для любого $n \geq n(r)$ выполняется неравенство

$$E_{L_2[-\pi,\pi]}\left(\widetilde{W}_2^r, \widetilde{MUP}_{s,n}\right) \leq d_{2\cdot(2s)^n}\left(\widetilde{W}_2^r, L_2[-\pi,\pi]\right) \cdot \sqrt{1 + \frac{C(r)}{2^n}}.$$

[3] Рвачев В.А. Финитные решения функционально дифференциальных уравнений и их применения // УМН. — т. 45, вып. 1 (271). — 1990. — С. 77 – 103.

Приближение сдвигами функции $mup_s(x)$

Достоинства:

– бесконечная гладкость;

– наличие базиса, состоящего из сдвигов одной функции с локальным носителем (напомним, что $Fmup_{s,n}(x) = 0$ вне отрезка $\left[-\frac{n+2}{2(2s)^n}, \frac{n+2}{2(2s)^n}\right]$);

– хорошие аппроксимационные свойства (экстремальность для приближения классов $\widetilde{W}_2^r$ по норме $L_2[-\pi, \pi]$ при $s = 1$ и асимптотическая экстремальность для приближения классов $\widetilde{W}_2^r$ по норме $L_2[-\pi, \pi]$ при $s \geq 2$);

Приближение сдвигами функции $mup_s(x)$

Достоинства:

– бесконечная гладкость;

– наличие базиса, состоящего из сдвигов одной функции с локальным носителем (напомним, что $Fmup_{s,n}(x) = 0$ вне отрезка $\left[-\frac{n+2}{2(2s)^n}, \frac{n+2}{2(2s)^n}\right]$);

– хорошие аппроксимационные свойства (экстремальность для приближения классов $\widetilde{W}_2^r$ по норме $L_2[-\pi, \pi]$ при $s = 1$ и асимптотическая экстремальность для приближения классов $\widetilde{W}_2^r$ по норме $L_2[-\pi, \pi]$ при $s \geq 2$);

Недостатки и открытые вопросы:

– размерность пространств сдвигов функции $mup_s(x)$ растет достаточно быстро (напомним, что $dim\ \widetilde{MUP}_{s,n} = 2(2s)^n$);

– необходимо получить удобные формулы для вычисления функций $Fmup_{s,n}(x)$.

Обобщенные *Fup*–функции

Определение. Обобщенной *Fup*–функцией называется функция вида

$$f_{N,m}(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \left(\frac{\sin\left(\frac{t}{N}\right)}{\frac{t}{N}} \right)^{m+1} \cdot F\left(\frac{t}{N}\right) dt,$$

где N — четное натуральное число, $m \in \mathbb{N}$, причем $m \le N - 2$, $F(t)$ — преобразование Фурье функции $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$ такой, что
1) $supp\ f(x) = [-1, 1]$;
2) $f(x)$ — четная функция;
3) $f(x) \ge 0$ на $[-1, 1]$;
4)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Обобщенные *Fup*–функции

Теорема 7 ([4]). Для любого $x \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$\frac{1}{N} \cdot f_{N,m}(x) = \sqrt{\frac{3}{2\pi(m+1)}} \cdot e^{-\frac{3x^2N^2}{2(m+1)}} + r_{N,m}(x),$$

причем

$$|r_{N,m}(x)| \leq \frac{1.04M+1}{(m+1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{0.85^{m+1}}{1.445} + \frac{1}{m+1} \cdot e^{-\frac{m}{6}}, x \in \mathbb{R},$$

где $M = \int\limits_{-1}^{1} x^2 f(x)dx$.

[4] I.V. Brysina, V.A. Makarichev. On the asymptotics of the generalized *Fup*–functions // Adv. Pure Appl. Math. — 5. — 2014. — P. 131–138.

Аппроксимационные свойства обобщенных *Fup*–функций

Пусть $L_{N,m}$ — пространство функций вида

$$\varphi(x) = \sum_k c_k \cdot f_{N,m}\left(\frac{x}{\pi} - \frac{2k - m}{N}\right), \quad x \in [-\pi, \pi]$$

таких, что $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi)$.

Аппроксимационные свойства обобщенных *Fup*–функций

Пусть $L_{N,m}$ — пространство функций вида

$$\varphi(x) = \sum_k c_k \cdot f_{N,m}\left(\frac{x}{\pi} - \frac{2k-m}{N}\right), \quad x \in [-\pi, \pi]$$

таких, что $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi)$.

Теорема 8. Если $m + 1 \geq r$, то существует такая константа M, что

$$E_{L_2[-\pi,\pi]}\left(\widetilde{W}_2^r, L_{N,m}\right) \leq \left(\frac{N}{2}\right)^{-r} \sqrt{1 + \frac{M^2}{2^{4m+3}} + \frac{M}{2^{2m+1}} + \frac{\sqrt{2M}}{2^{m+r+1}}}.$$

Аппроксимационные свойства обобщенных *Fup*–функций

Согласно [5], $d_N\left(\widetilde{W}_2^r, L_2[-\pi,\pi]\right) = (N/2)^{-r}$. Следовательно,

$$E_{L_2[-\pi,\pi]}\left(\widetilde{W}_2^r, L_{N,m}\right) \le d_N\left(\widetilde{W}_2^r, L_2[-\pi,\pi]\right)\cdot\sqrt{1+\varepsilon}.$$

Теорема 9.

$$supp\ f_{N,m}(x) = \left[-\frac{m+2}{N}, \frac{m+2}{N}\right].$$

Теорема 10.

$$dim\ L_{N,m} = N.$$

[5] A.N. Kolmogoroff. Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebener Funktionenklasse // Ann. of Math. — 37. — 1936. — P. 107–110.

Приближение с помощью обобщенных *Fup*–функций

Открытые вопросы:

— улучшение полученной оценки величины наилучшего приближения периодических дифференцируемых функций с помощью линейных комбинаций сдвигов обобщенных *Fup*–функций (например, при каких дополнительных ограничениях на функцию $f(x)$ будет выполнятся равенство $E_{L_2[-\pi,\pi]}\left(\widetilde{W_2^r}, L_{N,m}\right) = d_N\left(\widetilde{W_2^r}, L_2[-\pi,\pi]\right)$?)

— оценка величины наилучшего приближения периодических дифференцируемых функций с помощью линейных комбинаций сдвигов обобщенных *Fup*–функций по норме пространства C;

— исследование интерполяции с помощью обобщенных *Fup*–функций;

— вычисление обобщенных *Fup*–функций;

— асимптотика обобщенных *Fup*–функций.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!