ТЕОРЕМА О ПОЧТИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОМ БАЗИСЕ

Брысина И.В., Макаричев В.А.

Национальный аэрокосмический университет имени Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина

В работах [1-3] были исследованы аппроксимационные свойства пространств линейных комбинаций сдвигов атомарных функций $\mathrm{up}(x)$ и $\mathrm{mup}_s(x)$. Из приведенных в данных работах результатов следует, что эти пространства представляют собой достаточно перспективный аппарат приближения периодических дифференцируемых функций. В то же время к числу недостатков следует отнести показательную скорость роста размерности этих пространств. В связи с этим возникает естественный вопрос о возможности построения пространств функций, которые сочетали бы в себе достоинства и не имели бы недостатков вышеупомянутых пространств.

Обозначим через V_N пространство функций $f \in L_2[-\pi,\pi]$ таких, что

$$f(x) = \sum_{p=0}^{N/2-1} \left(a_p \cdot v_{N,p}(x) + b_p \cdot w_{N,p}(x) \right),$$

где $v_{N,0}(x) \equiv 1$,

$$w_{N,0}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(y_{N,k} \cdot \cos\left(\frac{N(2k+1)x}{2}\right) + z_{N,k} \cdot \sin\left(\frac{N(2k+1)x}{2}\right) \right),$$

$$v_{N,p}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(r_{N,p,k} \cdot \cos\left((p+kN)x\right) + q_{N,p,k} \cdot \cos\left((N(k+1)-p)x\right) \right),\ p = 1,2,\ldots,\frac{N}{2}-1;$$

$$w_{N,p}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(s_{N,p,k} \cdot \sin\left((p+kN)x\right) + t_{N,p,k} \cdot \sin\left((N(k+1)-p)x\right) \right),\ p = 1,2,\ldots,\frac{N}{2}-1.$$

Причем, $r_{N,p,0} = s_{N,p,0} = 1$ для всех $p = 1,\ldots,\frac{N}{2}-1$.

Далее мы будем говорить, что система функций $\left\{ v_{N,p}, w_{N,p} \right\}_{p=0}^{\frac{N}{2}-1}$ образует почти тригонометрический базис пространства V_N.

Теорема. *Если существуют числа* $m \in \mathbb{N}, M > 0$ *и функции* $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ *такие, что*

1) $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ *являются положительными, монотонно возрастающими и дифференцируемыми на отрезке* $[0,1/2]$*;*

2) $\varphi_1(1/2) \le 1$ *и* $\varphi_2(1/2) \le 1$*;*

3) $m+1 \ge r$*;*

4) $q_{N,p,0}^2 = \left(\frac{p}{N-p}\right)^{2(m+1)} \varphi_1^2\left(\frac{p}{N}\right)$,

$$t_{N,p,0}^2 = \left(\frac{p}{N-p}\right)^{2(m+1)} \varphi_2^2\left(\frac{p}{N}\right);$$

5) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(r_{N,p,k}^2 + q_{N,p,k}^2 \right) \le M\left(\frac{p}{N}\right)^{2(m+1)}$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(s_{N,p,k}^2 + t_{N,p,k}^2 \right) \le M\left(\frac{p}{N}\right)^{2(m+1)}$$

для любых $p = 1,2,\ldots,\frac{N}{2}-1;$

то $E_{L_2[-\pi,\pi]}\left(\tilde{W}_2^r, V_N\right) \le \left(\frac{N}{2}\right)^{-r} \sqrt{1+\varepsilon}$, *где* $\varepsilon = \frac{M^2}{2^{4m+3}} + \frac{M}{2^{2m+1}} + \frac{\sqrt{2M}}{2^{m+r+1}}$, $E_X(A,E)$ - *величина наилучшего приближения множества* A *множеством* E *по норме пространства* X *и* $\tilde{W}_2^r$ - *класс функций* $g \in C_{[-\pi,\pi]}^{r-1}$ *таких, что* $g^{(k)}(-\pi) = g^{(k)}(\pi)$ *для любого* $k = 0,1,\ldots,r-1$, $g^{(r-1)}(x)$ *является абсолютно непрерывной и* $\left\| g^{(r)} \right\|_{L_2[-\pi,\pi]} \le 1$.

Данное утверждение будем называть теоремой о почти тригонометрическом базисе.

Теорема о почти тригонометрическом базисе может быть использована при исследовании аппроксимационных свойств различных классов функций, например, обобщенных Fup-функций [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Рвачев В.Л., Рвачев В.А. Неклассические методы теории приближений в краевых задачах. – К.: Наук. думка, 1979. – 196 с.
2. Рвачев В.А. Финитные решения функционально-дифференциальных уравнений и их применения. // УМН. - 1990. - т. 45, вып. 1(271). - С. 77-103.
3. Макаричев В.А. Приближение периодических функций с помощью $\mathrm{mup}_s(x)$ // Матем. заметки. – 2013. – т. 93, вып. 6. – С. 878-901.
4. Brysina I.V., Makarichev V.A. On the asymptotics of the generalized Fup-functions // Adv. Pure Appl. Math. – 2014. – no. 5. – pp. 131-138.