ОЦІНКИ ІНТЕГРАЛІВ ЛАПЛАСА-СТІЛЬТЄСА

М.С. Добушовський, М.М. Шеремета

Львіввський національний університет імені І. Франка, Львів, Україна

Нехай V- клас невід'ємних неспадних необмежених справа на $[0,+\infty)$ функцій F. Будемо говорити, F є V(l), якщо F є V і $F(x) - F(x\text{-}0) \le l < +\infty$ для всі $x \ge 0$. Для невід'ємної на $[0,+\infty)$ функції f інтеграл

$$I(\sigma) = \int_0^\infty f(x)e^{x\sigma}dF(x), \qquad \sigma \in \Re$$

називається інтегралом Лапласа-Стілтьєса. Він є прямим узагальненням звичайного інтегралу Лапласа і ряду Діріхле з невід'ємними коефіцієнами a_n і показниками λ_n.

Через $\Omega(A)$ позначимо клас додатних необмежених на $(-\infty, A)$ функцій Φ таких, що похідна Φ' є додатною неперервно диференційованою і зростаючою до $+\infty$ на $(-\infty, A)$.

Для $\Phi \in \Omega(A)$ нехай φ- функція, обернена до Φ', $\Psi(x)= x- \Phi(x)/\Phi'(x)$- функція, асоційована з Φ за Ньютоном.

Метою цього повідомлення є зв'язок між зростанням між $I(\sigma)$ і $\mu(\sigma)= \sup\{f(x)\, e^{x\sigma} : x \ge 0\}$. Через LS(F) позначимо клас інтегралів $I(\sigma)$ із заданою функцією F таких, що абсциса інсування функції

$\mu(\sigma)$ дорівнює $\sigma_\mu = A$, і будемо говороти, що невід'ємна на $[0,+\infty)$ функція f має регулярну зміну відносно F, якщо існують $a \ge 0$, $b \ge 0$ і $h > 0$ такі, що $\int_{x-a}^{x+b} f(t)dF(t) \ge h\cdot f(x)$ для всіх $x \ge a$. Правильні такі твердження.

Твердження 1. Нехай F є V, $\Phi \in \Omega(+\infty)$ і

$\gamma : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ – така неперервна функція, що $\gamma(x) \uparrow +\infty$ при $x\to+\infty$.

Якщо $\Phi'(\sigma) = O(\Phi'(\Psi(\sigma)))$ при $\sigma\to+\infty$, функція $\gamma(x)/x$ незростаюча на $[x_0,+\infty)$ і $\gamma(x) = O(\Phi(\Psi(\varphi(x))))$ при $x\to+\infty$, то умова $\ln F(x)= o(\gamma(x))$ при $x\to+\infty$ є достатньою, а якщо F є V(l), функція γ неперервно диференційована на $[0,+\infty)$, $\ln (1/\gamma'(x)) = o(\gamma(x))$ і

$\ln \varphi(x) = o(\gamma(x))$ при $x\to+\infty$, то ця умова є необхідною для того, щоб для кожного інтегралу

$I \in LS_{+\infty}(F)$ з нерівоності $\ln \mu(\sigma, I) \le \Phi(\sigma)(\sigma \ge \sigma_0)$ випливала нерівність $\ln I(\sigma) \le \Phi(\sigma) + +o(\gamma(\Phi'(\sigma)))(\sigma\to+\infty)$

З іншого боку, якщо функція f має регулярну зміну відносно F, то з нерівності $\ln I(\sigma) \le \Phi(\sigma)$

$(\sigma \ge \sigma_0)$ випливає нерівність $\ln \mu(\sigma, I) \le \Phi(\sigma)+ O(\sigma)$ $(\sigma\to+\infty)$.

Твердження 2. Нехай F є V, $\Phi \in \Omega(0)$, а $\gamma : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ – неперервна функція така, що $\gamma(x) \uparrow +\infty$ при $x\to+\infty$.

Якщо $\Phi'(\sigma) = O(\Phi'(\Psi(\sigma)))$ при $\sigma \uparrow 0$, функція $\gamma(x)/x$ незростаюча на $[x_0,+\infty)$ і $\gamma(x) = O(\Phi(\Psi(\varphi(x))))$ при $x\to+\infty$, то умова $\ln F(x) = o(\gamma(x))$ при $x\to+\infty$ є достатньою, а якщо F є V(l), функція γ неперервно диференційована на $[0,+\infty)$ і $\ln \gamma'(x) = o(\gamma(x))$ при $x\to+\infty$, то ця умова є необхідною для того, щоб для кожного інтегралу $I \in LS_0(F)$ з нерівоності

$\ln \mu(\sigma, I) \le \Phi(\sigma)$, $(\sigma \in [\sigma_0,0))$ випливала нерівність

$\ln I(\sigma) \le \Phi(\sigma) + o(\gamma(\Phi'(\sigma)))(\sigma\uparrow 0)$.

З іншого боку, якщо функція f має регулярну зміну відносно F, то з нерівності

$\ln I(\sigma) \le \Phi(\sigma)$ $(\sigma \in [\sigma_0,0))$ випливає нерівність

$\ln \mu(\sigma, I) \le \Phi(\sigma)+ O(1)$ $(\sigma\uparrow 0)$.