УЗАГАЛЬНЕНИЙ РЯД ТЕЙЛОРА ДЛЯ НЕКВАЗІАНАЛІТИЧНОГО КЛАСУ ФУНКЦІЙ

Іванов Ю.О.

Національний аерокосмічний університет ім. М.Є.Жуковського (ХАІ), Харків, Україна.

Нехай $H_\rho(\bar{M})$ – клас нескінченно диференційованих на [-1,1] функцій, таких, що $\left\|f^{(n)}(x)\right\|_{C[-1,1]} < C(f)\rho^n M_n$, $n = 0,1,2,\ldots$. Якщо M_n зростають так швидко, що з рівностей $f^{(n)}(x_0) = 0$ для $n = 0,1,2,\ldots$ не випливає $f(x) \equiv 0$, цей клас називаємо неквазіаналітичним.

Мова йде про відновлення функцій з таких класів за значеннями похідних на скінчених множинах.

Що до цього В.О.Рвачов поставив декілька задач [1], дві з яких можна сформулювати так:

1. Слабка. Для даного класу $H_\rho(\bar{M})$ вказати скінчені множини X_n, $n = 0,1,2,\ldots$ такі, що:

а) якщо $f, g \in H_\rho(\bar{M})$ для $1 < \rho < \rho_0$ та $f^{(n)}(t) = g^{(n)}(t)$ для $t \in X_n$, $n = 0,1,2,\ldots$, тоді $f(x) \equiv g(x)$,

б) існують функції $\varphi_{n,t}(x) \in H_1(\bar{M})$, $t \in X_n$, $n = 0,1,2,\ldots$ такі, що $\varphi^{(n)}_{n,t}(t) = 1$, $\varphi^{(m)}_{n,t}(x) = 0$ для всіх $x \in X_m$, $m = 0,1,2,\ldots$, $n = 0,1,2,\ldots$ окрім випадку $m = n \wedge x = t$.

Умова б) говорить про те, що інформація про функцію в умові а) не є надлишковою.

2. Сильна. До умов а) та б) додається умова

в) будь-яка функція $f \in H_\rho(\bar{M})$, $\rho < \rho_0$, розкладається в ряд:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{t \in X_n} f^{(n)}(t)\varphi_{n,t}(x), \qquad (1)$$

який збігається рівномірно разом з рядами, що виходять з нього почленним диференціюванням будь-якого порядку.

Задача 2 була розв'язана В.О.Рвачовим [1] для класу $H_\rho = H_\rho\left(\left\{2^{n(n+1)/2}\right\}\right)$, $\rho < 2$. Для більш широких класів функцій $H_\rho\left(\left\{(2m)^{n(n+1)/2}\right\}\right)$ аналогічну задачу розв'язав Г.О.Старець [2] та В.М.Кузніченко [3,4] для класів функцій, похідні яких зростають як завгодно швидко. Але для цього вони окрім інформації про похідні функції на скінчених множинах залучили ще інформацію про другі або перші різниці похідних.

«Класичний» ряд (1) був отриманий лише для класичного класу В.О.Рвачова H_ρ і для класу $H^{(3)}_\rho = H_\rho\left(\left\{(9/4)^n 3^{n(n-1)/2}\right\}\right)$, $\rho < 1.09$ автором [5].

Доповідь стосується уточнення розв'язку слабкої задачі для класу $H^{(3)}_\rho$. А саме, ця задача розв'язується для деякого $\rho_0 = \rho^* \approx 1.58$, та наводиться приклад функції з классу $H^{(3)}_{\rho^*}$ для якої умова а) не виконується. Тобто $\rho = \rho^*$ максимальне, для якого умова а) має місце при даних X_n.

Докази будуються на пошуку та оцінці точних мажорант для класів кінцевої гладкості $A_{n,a}$, що складаються з функцій $f(x)$, які відповідають умовам:

1) $f(x) \in C^{n-1}[-1,0]$, $f^{(n-1)}(x)$ абсолютно неперервна,
2) $f(0) = 9/4a$, $f(-1) = 0$, $f^{(k)}(t) = 0$ для $t \in X_k$, $k = 1,\ldots,n-1$,
3) $|f^{(n)}(x)| < M(9/4)^n 3^{n(n-1)/2}$.

Використані методи можуть бути застосовані до розв'язання слабкої задачі для ширших неквазіаналітичних класів. Отриманий результат дає змогу розглядати сильну задачу для класів $H^{(3)}_\rho$ $\rho < \rho^*$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Рвачёв В.А. Финитные решения функционально-дифференциальных уравнений// Успехи мат. наук. – 1990. – 45, вып. 1(271). – С.77-103.
2. Рвачёв В.А., Старец Г.А. Некоторые атомарные функции и их применение. //Докл. АН УССР. - 1983.-№11.-С.22-24.
3. Кузниченко В.М. Обобщённые ряды Тейлора для класса функций $H(\bar{\rho}, \bar{m}, r)$ //Мат. Заметки.- 1989.-46, вып.4.-С. 120-122.
4. Кузниченко В.М. Приближение функций из класса $H(\rho, m)$ с помощью атомарной функции $\pi_m(x)$.. // Тез. докл. Всесоюзной школы по теории приближений.(г.Луцк, 29авг.-8сент.89г.), Киев, – 1989, – С. 89.
5. Иванов Ю.А. Представление неквазианалитических функций обобщёнными рядами Тейлора. //Докл. АН УССР. -1990.-№7.-С.11-14