ОЦІНКИ МАКСИМУМУ МОДУЛЯ АНАЛІТИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

[1]*Плацидем М.І.*, [2]*.Шеремета М.М.*

[1,2]Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна

Нехай $\phi(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{izx}dF(x), z\in(-\infty,+\infty)$ аналітична в $D_R=\{z:|z|<R\}$, $R>0$, характеристична функція ймовірносного закону F, а $W_F(x)=1-F(x)+F(-x), x\ge 0.$

Приймемо $\mu(r,\phi)=\sup\{W_F(x)e^{rx}:x\ge 0\}$.

Порядком характеристичної функції називається величина $\rho[\phi]=\overline{\lim\limits_{r\to+\infty}}\frac{\ln\ln M(r,\phi)}{\ln r}$, де функція $M(r,\phi)=\max\{|\phi(z)|:|z|=r\}$.

Н.І. Яковлєва [1] довела, що якщо ϕ має порядок $\rho[\phi]=1+1/\alpha$, $0<\alpha<+\infty$, і для деякого $\gamma\in(\alpha,+\infty)$

$$\varliminf_{\substack{x\to+\infty\\ x\in\bigcup}}\frac{\ln\ln\frac{1}{W_F(x)}}{\ln x}\ge 1+\gamma,$$

де $\bigcup=\bigcup_j(a_{2_j},a_{2_{j+1}})$, $a_n\uparrow+\infty$ $(n\to+\infty)$ і

$$\varliminf_{j\to\infty}\frac{\ln a_{2_{j+1}}}{\ln a_{2_j}}\ge\frac{\pi}{\alpha},$$

то для нижнього порядку $\lambda[\phi]$ правильна оцінка $\lambda[\phi]\le 1+1/\gamma$.

Через $\Omega(0,R)$, позначимо клас додатних необмежених на $[r_0,R)$ для деякого $r_0\in(0,R)$ функцій Φ таких, що похідна Φ' додатна, неперервно диференційовна і зростає до $+\infty$ на $[r_0,R)$, і нехай ϕ - функція, обернена до Φ', а $\Psi(r)=r-\frac{\Phi(r)}{\Phi'(r)}$ - функція, асоційована з Φ за Ньютоном.

Для $\Phi\in\Omega(0,R)$, $\Phi'(r_0)<a<b<+\infty$ приймемо

$$G_1(a,b,\Phi)=\frac{ab}{b-a}\int_a^b\frac{\Phi(\varphi(t))}{t^2}dt$$

і

$$G_2(a,b,\Phi)=\Phi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b\varphi(t)dt\right).$$

Правильна така теорема.

Теорема

Нехай $\Phi\in\Omega(0,R)$, $0<R\le+\infty$, *і* ϕ*- аналітична в* D_R *характеристична функція ймовірносного закону* F, *який задовольняє умову*

$$\overline{\lim_{r\uparrow R}}W_F(x)e^{rx}=+\infty.$$

Припустимо, що
$\ln\mu(r,\phi)\le\Phi(r)$ *для всіх* $r\in[r_0,R)$ *і*
$\ln W_F(x_k)-\ln W_F(x_{k+1})=O(1), k\to\infty$, *для деякої зростаючої до* $+\infty$ *послідовності* $X=(x_k)$ *додатних чисел. Тоді*

$$\varliminf_{r\uparrow R}\frac{\ln\mu(r,\phi)}{\Phi(r)}\le\varliminf_{k\to\infty}\frac{G_1(x_k,x_{k+1},\Phi)}{G_2(x_k,x_{k+1},\Phi)}$$

і, якщо

$$Q(r)+\left(\frac{\Phi(r)\Phi''(r)}{(\Phi'(r))^2}-1\right)\ln\Phi(r)\ge q>-\infty,$$

$r\in[r_0,R)$, *де* $Q(r)\equiv 0$, *якщо* $R<+\infty$, *і* $Q(r)\equiv\ln r$, *якщо* $R=+\infty$, *то*

$$\varliminf_{r\uparrow R}\frac{\ln\ln\mu(r,\phi)}{\ln\Phi(r)}\le\varliminf_{k\to\infty}\frac{\ln G_1(x_k,x_{k+1},\Phi)}{\ln G_2(x_k,x_{k+1},\Phi)}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Яковлева Н. И. О росте целых характеристических функций вероятностных законов.– Киев.: Наукова думка, 1976. – С. 43-54.