ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧ

Иевлев И.И.
Харьковский национальный университет
им. В.Н. Каразина, г. Харьков, Украина

Рассматривается приближенное решение операторного уравнения с линейным вполне непрерывным оператором A

$$Ax = y^*, \tag{1}$$

действующим из нормированного пространства X в нормированное пространство Y. Корректная поставка задачи требует выполнения трех условий [1]:

1) $y^* \in R(A)$,
2) $Ax = 0 \Rightarrow x = \theta$,
3) $\|x\| \le k\|Ax\| \quad \forall x \in D(A)$,

где $\mathrm{D}(A), R(A), y^*$ - области определения и значений оператора и заданная правая часть уравнения (1).

Последнее свойство дает устойчивость решения уравнения (1) по отношению к малым возмущениям Δy^* правых частей при условии $y^* + \Delta y^* \in R(A)$. В случае невыполнения условия 3) говорят о некорректно поставленной задаче. При необходимости решения некорректных задач привлекают методы регуляризации и понятие устойчивости по Тихонову А.Н. [1].

В настоящей работе предлагается другой подход к решению таких задач, использующий общую теорию приближенных методов Канторовича Л.В, Гавурина М.К. [2,3]. Он заключается в построении и решении приближенного уравнения

$$A_n x_n = y_n^* \tag{2}$$

с оператором $A_n \in [X_n \to Y_n]$ в других пространствах X_n, Y_n. Уравнение (2) аппроксимирует уравнение (1). Поэтому между пространствами X, X_n и Y, Y_n устанавливается связь посредством линейных ограниченных операторов $\varphi_n \in [\mathrm{X} \to \mathrm{X}_n],\ \psi_n \in [Y \to Y_n]$.

Предполагается:

1) X_n, Y_n - конечномерные
2) $D(A_n) = X_n, R(A_n) \subseteq Y_n$
3) существуют $A_n^{-1} : \|A_n^{-1}\| = K_n < \infty$ (возможно $K_n \to \infty$ при $n \to \infty$)
4) $D(\varphi_n) = X,\ R(\varphi_n) = X_n,\ D(\psi_n) = Y$, $\mathrm{R}(\psi_n) = \mathrm{Y}_n$,
5) существуют линейные операторы (восполнения) $\bar{\varphi}_n : x^{(n)} = \bar{\varphi}_n x_n \in X \ \forall x_n \in X_n$, $\bar{\psi}_n : y^{(n)} = \bar{\psi}_n y_n \in R(A) \ \forall y_n \in Y_n$.

Вводится понятие меры аппроксимации

$$\gamma_n(x) = \|A_n \varphi_n x - \psi_n Ax\|_{Y_n}, \quad \forall \mathrm{x} \in D(A) \tag{3}$$

Построение устойчивого алгоритма решения уравнения первого рода

$$Ax(s) \equiv \int_0^1 G(s,t)x(t)dt = y(s) \tag{4}$$

где $G(s,t)$ - функция Грина первой краевой задачи для оператора $By \equiv -y''(s) \quad (s \in [0,1])$ производится так. Разыскиваемая функция аппроксимируется кусочно линейной функцией, интегралы заменяются механическими квадратурами с использованием формул Гаусса. Полученная система линейных алгебраических уравнений представляет приближенное уравнение (2). Для эксперимента в правую часть этого уравнения вводилась погрешность

$$\Delta y_n^* = \left\{ (-1)^i \frac{\delta}{n^p} \right\}_{i=1}^n$$

Расчеты показали, что с увеличением n имеет место сходимость каркасов приближенных решений при определенном выборе p. На левом рис.1 приведены графики приближенных решений для $p = 1$, а на правом - для $p = 3$. В первом случае точность определения данных задачи (значения Δy_n^*) отстает от роста порядка уравнений n. При $\delta \ne 0$ происходит раскачка решения. Если же скорость точности определения данных задачи достаточно велика $p \ge 3$, то с увеличением n приближенные решения стремятся к точному. Можно сказать, что в этом случае имеет место (α, β)- устойчивость алгоритма [3].

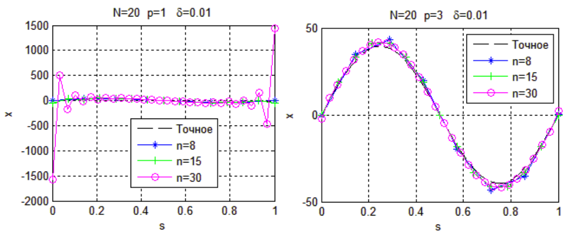

Рис. 1

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. - М.: Наука, 1974. - 223 с.
2. Гавурин М.К. Лекции по методам вычислений. М.: Наука. - 1971.-248 с.
3. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. - М.: Наука, 1977, - 742 с.