ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧ

Иевлев И.И.
Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина,
г. Харьков, Украина

Рассматривается приближенное решение операторного уравнения

$$Ax = y^* \tag{1}$$

с линейным оператором A, область определения которого $D(A)$ лежит в нормированном пространстве X, а заданная правая часть y^* принадлежит области его значений $R(A)$ другого нормированного пространства Y. В случае корректно поставленной задачи требуется выполнения трех условий (классическая корректная постановка задачи) [1]:

1) решение уравнения (1) существует $\left(y^* \in R(A)\right)$,
2) решение единственное $\left(Ax = 0 \Rightarrow x = \theta\right)$,
3) $\|x\| \le k\|Ax\| \quad \forall x \in D(A)$.

Последнее свойство эквивалентно ограниченности обратного оператора $\|A^{-1}\| \le k$, что позволяет говорить об устойчивости решения уравнения (1) по отношению к малым погрешностям Δy^* правых частей при условии $y^* + \Delta y^* \in R(A)$. Однако имеются практически важные задачи математической физики, для которых условие 3) не выполняется. Такие задачи носят название некорректно поставленных задач. К их числу относится задача Коши для уравнения Лапласа (пример Адамара), интегральные уравнения Фредгольма первого рода, обратные задачи гравиметрии [2-4]. Необходимость численного решения некорректно поставленных задач привела к появлению понятия корректности по Тихонову А.Н., опирающегося на известную лемму [3, стр.40] :

если для точной правой части y^* уравнения (1) существует единственный элемент x^*, принадлежащий компакту $M \subset D(A) \subset X$, то обратный оператор A^{-1} непрерывен на множестве $N = AM$, и, если $y^* + \Delta y^* \in N$, то решение уравнения $A\tilde{x} = y^* + \Delta y^*$ стремится к решению точного уравнения (1) при $\|\Delta y^*\| \to 0$.

Для решения задач корректных по Тихонову А.Н. разработаны методы регуляризации [2-5]. В настоящей работе предлагается другой подход к решению таких задач, использующий общую теорию приближенных методов Канторовича Л.В, Гавурина М.К. [6,7]. Он заключается в построении и решении приближенного уравнения

$$A_n x_n = y_n^* \tag{2}$$

с оператором A_n, действующим из некоторого нормированного пространства X_n в нормируемое пространство Y_n. Уравнение (2) в определенном смысле аппроксимирует уравнение (1). Поэтому между пространствами X, X_n и Y, Y_n устанавливается связь посредством линейных ограниченных операторов $\varphi_n : \mathrm{X} \to \mathrm{X}_n$, $\psi_n : Y \to Y_n$.

Предполагается:

1) X_n, Y_n - конечномерные
2) $D(A_n) = X_n, R(A_n) \subseteq Y_n$
3) существуют $A_n^{-1} : \left\|A_n^{-1}\right\| = K_n < \infty$ (однако, возможно $K_n \to \infty$ при $n \to \infty$)
4) $D(\varphi_n) = X$, $R(\varphi_n) = X_n$, $D(\psi_n) = Y, \mathrm{R}(\psi_n) \subseteq \mathrm{Y}_n$, существуют линейные операторы $\bar{\varphi}_n : x^{(n)} = \bar{\varphi}_n x_n \in X \ \forall x_n \in X_n$, $\bar{\psi}_n : y^{(n)} = \bar{\psi}_n y_n \in R(A) \ \forall y_n \in Y_n$.

Вводятся понятия:

<u>мера аппроксимации</u>

$$\gamma_n(x) = \left\|A_n \varphi_n x - \psi_n A x\right\|_{Y_n}, \ \forall \, \mathrm{x} \in D(A) \tag{3}$$

<u>условие аппроксимации</u>

$$\lim_{n \to \infty} \gamma_n(x) = 0 \quad \forall x \in D(A) \tag{4}$$

<u>порядок аппроксимации (p-й порядок)</u>

$$\gamma(x) = O\left(\frac{1}{n^p}\right) \tag{5}$$

<u>каркас приближенного решения</u> x_n^* - решение уравнения (2) с правой частью $y_n^* = \psi_n y^*$,

<u>приближенное решение</u> $x^{(n)} = \bar{\varphi}_n x_n^*$.

Известны теоремы о сходимости каркасов приближенных решений

$$\tau_n \equiv \left\|\varphi_n x^* - x_n^*\right\|_{X_n} \le \left\|A_n^{-1}\right\| \gamma_n\left(x^*\right) \to 0 \ (n \to \infty) \tag{6}$$

и приближенных решений ([7], стр.13)

$$\sigma_n \equiv \left\|x^{(n)} - x^*\right\|_X \le \left\|\bar{\varphi}_n\right\| \left\|A_n^{-1}\right\| \gamma_n\left(x^*\right) + \left\|\bar{\varphi}_n \varphi_n x^* - x^*\right\| \to 0 \ (n \to \infty) \tag{7}$$

В случае неограниченного обратного оператора A^{-1} (условие корректности оператора A не выполнено!) норма оператора A_n^{-1} с увеличением n растет. В этом случае для сходимости каркасов приближенных решений необходимо увеличивать порядок аппроксимации.

При составлении приближенного уравнения (2) и дальнейшем его решении в нем допускаются искажения как правой части Δy_n^*, так и оператора ΔA_n. Фактически вместо уравнения (2) решается «искаженное» уравнение

$$\left(A_n + \Delta A_n\right)\left(x_n^* + \Delta x_n^*\right) = y_n^* + \Delta y_n^* \tag{8}$$

В этом случае возникает вопрос об устойчивости метода по отношению к малым возмущениям оператора ΔA_n и правых частей Δy_n^*. Следующее неравенство позволяет дать ответ на вопрос об устойчивости алгоритма ([7], стр.28, (8))

$$\frac{\left\|\Delta x_n^*\right\|}{\left\|x_n^*\right\|} \le \frac{\mu\left(A_n\right)}{1-\mu\left(A_n\right)\frac{\left\|\Delta A_n\right\|}{\left\|A_n\right\|}}\left[\frac{\left\|\Delta A_n\right\|}{\left\|A_n\right\|}+\frac{\left\|\Delta y_n^*\right\|}{\left\|y_n^*\right\|}\right] \tag{9}$$

где $\mu\left(A_n\right)=\left\|A_n\right\|\left\|A_n^{-1}\right\|$ - аналог H-чисел обусловленности матриц [9].

Уравнения (1) с вполне непрерывным оператором A относят к уравнениям первого рода. Для них обратный оператор не является ограниченным, следовательно, задача (1) является некорректно поставленной, последовательность $\mu_n=\mu\left(A_n\right)$ оказывается возрастающей. Гаврин М.К. вводит понятие $\left(\alpha,\beta\right)$-устойчивости процесса нахождения каркасов приближенных решений ([7], стр.32):

процесса нахождения каркасов приближенных решений $\left(\alpha,\beta\right)$-устойчив, если из условия

$$\frac{1}{\alpha_n}\frac{\left\|\Delta A_n\right\|}{\left\|A_n\right\|}\to 0,\ \frac{1}{\beta_n}\frac{\left\|\Delta y_n^*\right\|}{\left\|y_n^*\right\|}\to 0\ \ (n\to\infty)$$

следует сходимость каркасов приближенных решений и стремление к нулю относительной погрешности приближенных решений

$$\frac{\left\|\Delta x_n^*\right\|}{\left\|x_n^*\right\|}\to 0\ \ (n\to 0)$$

Здесь $\alpha=\left\{\alpha_n\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\beta=\left\{\beta_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ - невозрастающие последовательности чисел.

Из неравенства (9) следует, что $\left(\alpha,\beta\right)$-устойчивость нахождения каркасов приближенных решений будет иметь место тогда, когда $\alpha_n\mu_n$, $\beta_n\mu_n$ ограничены при $n\to\infty$.

Т.о. для устойчивого процесса определения каркасов приближенных решений уравнения (1) с вполне непрерывным оператором требуется согласовывать скорость аппроксимации исходных данных задачи со скоростью роста нормы обратного оператора A_n^{-1}.

Пример. Уравнение Фредгольма первого рода.

Рассмотрим краевую задачу для функции одной переменной $y(s)$, $s\in[0,1]$, обращающейся в нуль на концах интервала и удовлетворяющей уравнению

$$-\frac{d^2y}{ds^2}=x(s)$$

Этой задаче соответствует операторное уравнение

$$By\equiv-\frac{d^2y(s)}{ds^2}=x(s),\ D(B)=\left\{y(s)\in C^2\left([0,1]\right):\ \mathrm{y}(0)=\mathrm{y}(1)=0\right\} \tag{10}$$

Для данной краевой задачи можно указать функцию Грина

$$G(s,t)=\frac{1}{2}\begin{cases} t(1-s),\ (0\le t\le s)\\ \mathrm{s}(1-t),\ (\mathrm{s}\le t\le 1)\end{cases} \qquad (11)$$

и обратный оператор $A=B^{-1}$

$$Ax(s)\equiv\int_0^1 G(s,t)x(t)dt=y(s) \qquad (12)$$

Оператор B является положительно определенным оператором с собственными значениями, равными

$$\lambda_n=\pi^2 n^2 \qquad (13)$$

В качестве пространств X,Y выберем пространство непрерывных функций, заданных на интервале $[0,1]$: $X=Y=C([0,1])$. Тогда $D(A)=X$, $R(A)=$ $=\left\{y(s)\in C^{(2)}([0,1]):\ y(0)=y(1)=0\right\}\subset Y$.

На интервале $[0,1]$ выберем две последовательности узлов

$$s_i=\frac{i}{n+1}\quad\left(i=\overline{0,n+1}\right),\quad t_k=\frac{k-1}{n-1}\quad\left(k=\overline{1,n}\right)$$

Пусть операторы φ_n переводит непрерывные функции в n-мерные вектора пространства m_n

$$x_n=\left\{x_k\equiv x(t_k)\right\}_{k=1}^{n}$$

а оператор ψ_n - непрерывные функции в n-мерные вектора

$$y_n=\left\{\mathrm{y}_k\equiv \mathrm{y}(\mathrm{s}_i)\right\}_{i=0}^{n+1}$$

Операторы восполнения $\bar{\varphi}_n,\bar{\psi}_n$ определим, используя линейную интерполяцию

$$x^{(n)}(t)=\bar{\varphi}_n x_n=\sum_{k=2}^{n}\left\{x_{k-1}\frac{t-t_k}{t_{k-1}-t_k}+x_k\frac{t-t_{k-1}}{t_k-t_{k-1}}\right\} \qquad (14)$$

и многочлены Бернштейна С.Н.

$$y^{(n)}(\mathrm{s})=\bar{\psi}_n y_n=\sum_{i=0}^{n+1}\left\{y_i\, C_{n+1}^{i}\, s^i\left(1-s\right)^{n+1-i}\right\}=\sum_{i=1}^{n}\left\{y_i\, C_{n+1}^{i}\, s^i\left(1-s\right)^{n+1-i}\right\} \qquad (15)$$

$\forall y_n=\left\{y_i\right\}_{i=1}^{n}$, дополненного вначале и в конце последовательности нулями.

Таким образом, $D(A_n)=X_n=m_n$, $Y_n=m_n$, $X^{(n)}=\bar{\varphi}_n X_n$ - множество кусочно-линейных функций, $Y^{(n)}=\bar{\psi}_n Y_n$ - множество многочленов степени $n+1$, обращающихся в нуль на концах интервала $[0,1]$.

Оператор приближенного уравнения построим так. Запишем выражение

$$\tilde{A}_n x_n=\left\{\int_0^1 G(s_i t)\,x^{(n)}(t)dt\right\}_{i=1}^{n}=\left\{\sum_{k=2}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k} G(s_i t)\,x^{(n)}(t)dt\right\}_{i=1}^{n}=$$

$$=\left\{\sum_{k=2}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k} G(s_i t)\left[x_{k-1}\frac{t-t_k}{t_{k-1}-t_k}+x_k\frac{t-t_{k-1}}{t_k-t_{k-1}}\right]dt\right\}_{i=1}^{n}=$$

Затем интегралы здесь заменим квадратурными формулами, разбивая интервал $[t_{k-1},t_k]$ на N подинтервалов одинаковой длины и на каждом из них применяя квадратурную формулу Гаусса с тремя узлами $\theta_1,\theta_2,\theta_3$ и коэффициентами d_1,d_2,d_3, дающую точное значение интеграла для многочленов пятой степени

$$\int_a^b F(t)dt \approx \sum_{m=1}^{N}\frac{b-a}{2N}\sum_{j=1}^{3} d_j F\left[a+(b-a)\frac{2m-1}{2N}\theta_j\right]$$

Обозначим

$$J_N(F,a,b)=\sum_{m=1}^{N}\frac{b-a}{2N}\sum_{j=1}^{3} d_j F\left[a+(b-a)\frac{2m-1}{2N}\theta_j\right]$$

Тогда левую часть приближенного уравнения можно записать в виде

$$A_n x_n = \left\{ x_1 J_N^{'}\left(G(s_i,t)\frac{t-t_2}{t_1-t_2}, t_1, t_2 \right) + \right.$$

$$+\sum_{k=2}^{n-1} x_k \left[J_N^{'}\left(G(s_i,t)\frac{t-t_k}{t_{k-1}-t_k}, t_{k-1}, t_k \right) + J_N^{'}\left(G(s_i,t)\frac{t-t_{k-1}}{t_k-t_{k-1}}, t_k, t_{k+1} \right)\right] + \qquad (16)$$

$$\left. + x_n J_N^{'}\left(G(s_i,t)\frac{t-t_{n-1}}{t_n-t_{n-1}}, t_{n-1}, t_n \right)\right\}_{i=1}^{n}$$

Здесь штрих ($J_N^{'}$) означает, что при попадании значения s_i в интервал $[t_{k-1},t_k]\ (\mathrm{k}=2,...,\mathrm{n})$ соответствующий интервал необходимо разбить на два подинтервала $[t_{k-1},s_i]$ и $[s_i,t_k]$, и применив к каждому из них указанную квадратурную формулу. В силу того, что функция Грина на интервалах $[0,\mathrm{s}_i],[\mathrm{s}_i,1]$ является линейной функцией переменной t, то квадратурные формулы применяются к функциям в виде многочленов второй степени, а, следовательно, является точной. Тогда будет верным равенство

$$A_n x_n = \psi_n A\overline{\varphi}_n x_n$$

Мера аппроксимации в этом случае равна

$$\gamma_n(x^*) = \left\|\psi_n A\overline{\varphi}_n\varphi_n x^* - \psi_n A x^*\right\| \le \left\|\psi_n\right\|\left\|A\right\|\left\|\overline{\varphi}_n\varphi_n x^* - x^*\right\| \qquad (17)$$

Таким образом, приближенное уравнение (2) представлено системой линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} B_{ik}x_k = b_i \quad (i=1,...,n) \qquad (18)$$

с матрицей, коэффициенты которой определяются выражениями, стоящими в фигурных скобках соотношения (16), а правые части равны $b_i = y_i^* = y^*(s_i)$. В целях проверки устойчивости метода в правые части уравнений (18) вносились возмущения $\Delta y_n^* = \left\{(-1)^i \delta n^{-p}\right\}_{i=1}^{n}$, где δ малая постоянная, p - целое, определяющее скорость убывания погрешности.

Уравнение (12) при $y^* = y(s) = \sin(2\pi s)$ имеет точное решение $x^* = x(t) = 4\pi^2 \sin(2\pi t)$, являющейся аналитической функцией на интервале $[0,1]$, Можно воспользоваться оценкой быстроты сходимости интерполирующей функции [8]

$$\left\| \bar{\varphi}_n \varphi_n x^* - x^* \right\| = O(n^{-1})$$

Откуда следует

$$\gamma_n(x^*) = O(n^{-1})$$

Таким образом, сходимость каркасов приближенных решений к каркасу точного решения зависит от поведения произведения $\left\| A_n^{-1} \right\| \gamma(x^*)$. Если $\left\| A_n^{-1} \right\| \gamma(x^*) \to 0$ с увеличением n, то $\tau_n \to 0$. Вопрос устойчивости метода также связан с поведением $\left\| A_n^{-1} \right\|$, а, следовательно, и поведением $\mu\left(A_n\right)$. Характер поведения указанных величин с изменением n можно определить в процессе вычислений. Так в рассматриваемом примере приближенное уравнение представляет собой систему линейных алгебраических уравнений, $\mu\left(A_n\right)$ представляют собой H- числа обусловленности этой системы. Характер изменения $\mu\left(A_n\right)$ изображен на рис.3. С увеличением n $\mu\left(A_n\right)$ сильно возрастает, система алгебраических уравнений становится плохо обусловленной.

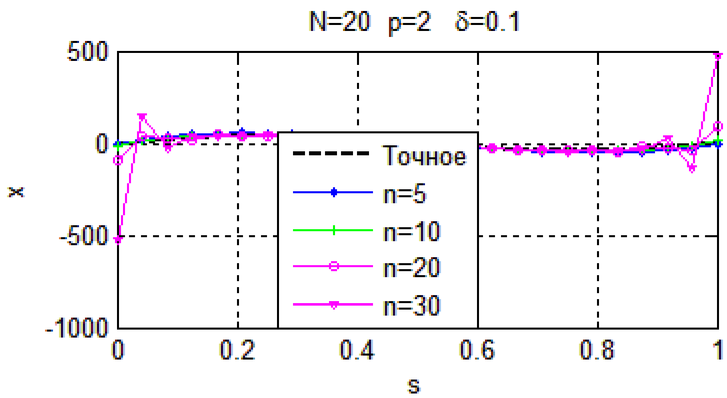

Рис.1

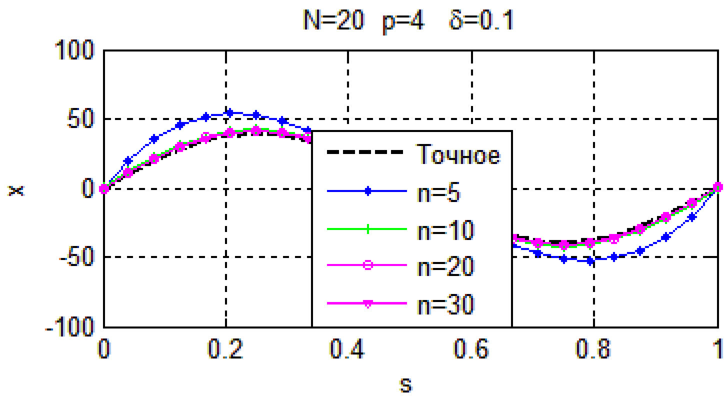

Рис.2

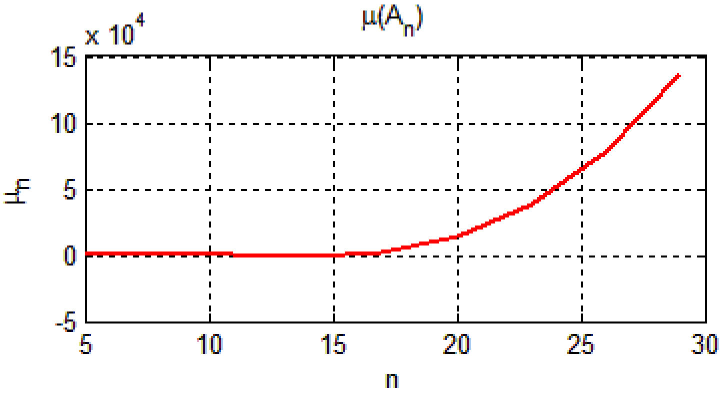

Рис.3

На рис.1,2 изображены графики точного и приближенных решений для $n = 5,10,20,30$. Рис.1 соответствует случаю, когда скорость убывания погрешностей правых частей незначительна $p = 2$. С увеличением n происходит раскачка приближенного решения. Если скорость убывания погрешности увеличит (рис.2, $p > 3$), приближенные решения сходятся к точному. Здесь можно говорить о $(\alpha\,\beta)$-устойчивости алгоритма, где $\alpha_n = \beta_n = O(n^{-p}) \quad (p > 3)$. .

ЛИТЕРАТУРА

1. Михлин С.Г. Курс математической физики. М.: Наука, 1968. - 576 с.
2. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск, Физматгиз, 1962. - 210 с.
3. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974. - 223 с.
4. Иванов В.К. О некорректно поставленных задачах. Матем. сб., 1963, 61, №2, с. 211-223.
5. Тихонов А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации. ДАН СССР, 1963, 151, №3, с. 501-504.
6. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977, 742 с.
7. Гавурин М.К. Лекции по методам вычислений. М.: Наука. - 1971.-248 с.
8. Натансон И.П. Конструктивная теория функций. М.-Л.: Гостехиздат. - 1949. - 688 с.
9. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. Госиздат, М.: ФМЛ.-1960.-656 с.