

## О РАЗРЕШИМОСТИ ВТОРОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Лесина Е.В.

КИИ ДонНТУ, Красноармейск, Украина

В последнее время граничные задачи для линейных эллиптических уравнений и систем изучаются в основном для правильно эллиптического случая. В 1948

году А.В. Бицадзе привел пример уравнения  $\frac{d^2u}{dz^2} = 0$ ,

$z = x_1 + ix_2$ , однородная задача Дирихле в единичном круге для которого имеет счетное число линейно независимых полиномиальных решений  $u_N(z) = (1 - z\bar{z})z^N$  (см. [1]). Позже он указал еще один пример уравнения с тем же свойством, но уже с простыми нулями символа дифференциального оператора [2]. В статье [2] показано, кроме того, что задача Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = t \frac{\partial u}{\partial t} + \bar{t} \frac{\partial u}{\partial \bar{t}} = 0, \quad t = e^{i\theta},$$

в круге  $K$ , как и задача Дирихле, имеет счетное множество линейно независимых решений вида

$$u(z) = \psi(z) - \frac{z}{z} \int_0^z \tau^2 \psi(\tau) d\tau,$$

где  $\psi(z)$  – произвольная в круге  $K$  аналитическая функция, которая непрерывна в  $\bar{K}$  вместе с первой производной.

Настоящая работа посвящена изучению проблемы разрешимости неоднородной задачи Неймана

$$u'_\nu \Big|_{\partial K} = \kappa \tag{1}$$

в ограниченной области для скалярного неправильно эллиптического дифференциального уравнения второго порядка с комплексными коэффициентами:

$$Lu \equiv \left( \sin \varphi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos \varphi_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \times \tag{2}$$

$$\times \left( \sin \varphi_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos \varphi_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) u = 0.$$

Рассмотрен модельный случай, когда в качестве области выбран единичный круг  $K$ , а уравнение (2) не содержит младшие члены. Решен вопрос характеристики классов граничных данных, для которых задача (1), (2) имеет единственное решение в обычном пространстве Соболева. Такими классами в типичном случае оказались пространства функций с экспоненциальным убыванием коэффициентов Фурье.

В приведенной ниже теореме содержатся результаты исследования двух ситуаций – в зависимости

от теоретико-числовых свойств числа  $\varphi_0 = \varphi_2 - \varphi_1$ , называемого углом между характеристиками уравнения (2). Влияние угла между характеристиками на показатель гладкости решения второй краевой задачи проявляется подобно эффекту, возникающему при рассмотрении задачи Дирихле для того же уравнения [3].

**Теорема.** Если число  $\varphi_0$  вещественное и  $\pi$ -иррациональное, причем

$$\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |\sin n\varphi_0| > \text{Const} \cdot n^{-\mu},$$

а правая часть граничного условия  $\kappa \in H_\rho^{s-3/2}(\partial K)$ , где

$$H_\rho^m(\partial K) = \left\{ \alpha(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n^C \cos n\tau + \alpha_n^S \sin n\tau) \right.$$

$$\left. \in L_2(\partial K) : \sum_{n=0}^{\infty} (|\alpha_n^C|^2 + |\alpha_n^S|^2) \rho^2 (1+n^2)^m < \infty \right\} -$$

весовое пространство Соболева с экспоненциальным весом  $\rho = e^{n(|\text{Im}(\varphi_1 + \varphi_2)| - |\text{Im}(\varphi_2 - \varphi_1)|)}$ , то решение задачи (1), (2)

существует, единственно (с точностью до аддитивной постоянной) и принадлежит пространству  $H^{s-\mu}(K)$ .

Если же число  $\varphi_0$  комплексное и по-прежнему  $\kappa \in H_\rho^{s-3/2}(\partial K)$ , то решение задачи (1), (2) существует, единственно (с точностью до аддитивной постоянной) и принадлежит пространству  $H^s(K)$ .

Метод исследования и доказательство основного результата основаны на связи исходной задачи с порождаемой ею обобщенной проблемой моментов, свойства которой определяют свойства граничной задачи (см. [3,4,5]).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Бицадзе А.В. О единственности решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными // Успехи мат. наук. – 1948. – Т. 3, №6. – С. 211-212.
2. Бицадзе А.В. Некоторые классы дифференциальных уравнений с частными производными. – М.: Наука. – 1981. – 448 с.
3. Бурский В.П., Кириченко Е.В. О задаче Дирихле для неправильно эллиптического уравнения // УМЖ. – 2011. – Т. 63, №2. – С. 156-164.
4. Бурский В.П. О краевых задачах для эллиптического уравнения с комплексными коэффициентами и одной проблеме моментов // УМЖ. – 1993. – Т. 45, № 11. – С. 1476-1483.
5. Бурский В.П., Лесина Е.В. Задача Неймана и одна задача с косою производной для неправильно эллиптического уравнения // УМЖ. – 2012. – Т. 64, №4. – С. 451-462.