

# ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВЫБОРЕ ДЛИТЕЛЬНОСТИ ВРЕМЕННЫХ ШАГОВ НАГРУЖЕНИЯ В КВАЗИСТАТИЧЕСКОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ С УЧЕТОМ ТРЕНИЯ

---

Стреляев Юрий Михайлович  
Запорожский национальный университет



# Постановка задачи

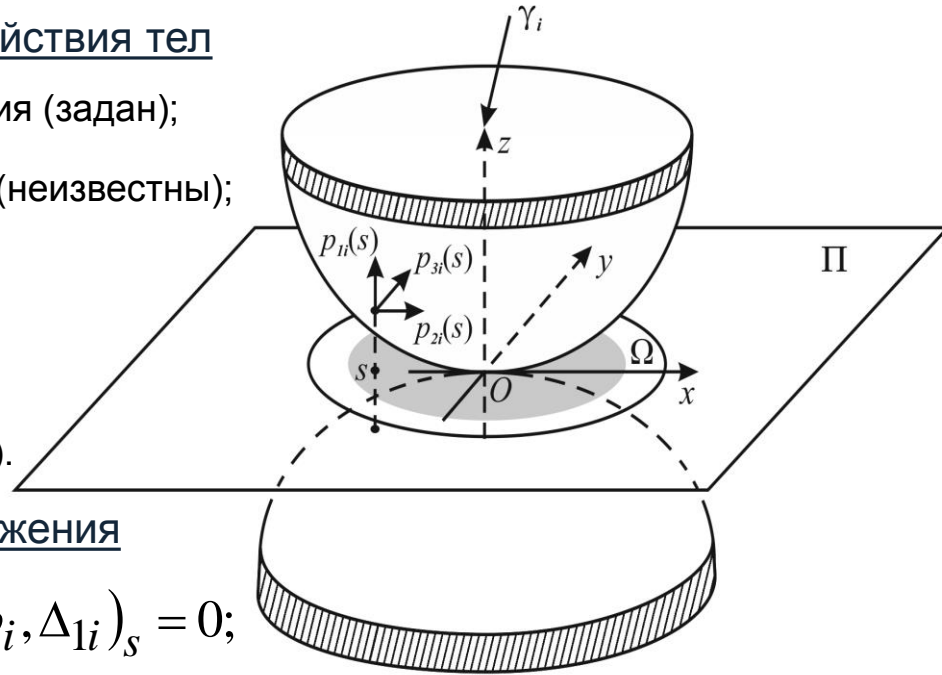
## Схема взаимодействия тел

$\gamma_i = (\Delta_{1i}, \Delta_{2i}, \Delta_{3i})$  - вектор жесткого смещения (задан);  
 $p_{1i}(s), p_{2i}(s), p_{3i}(s)$  - контактные напряжения (неизвестны);

$\Omega$  - область возможного контакта;

$i$  - номер шага нагружения;

инерционные и волновые эффекты не учитываются (квазистатическая задача).



## Граничные условия на $i$ -ом шаге нагружения

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{1i}(s) \geq 0; F_1(p_i, \Delta_{1i})_s \geq 0; p_{1i}(s) \cdot F_1(p_i, \Delta_{1i})_s = 0; \\ \sqrt{p_{2i}^2(s) + p_{3i}^2(s)} \leq \mu \cdot p_{1i}(s); \\ \sqrt{F_2^2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s + F_3^2(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s} \cdot p_{2i}(s) + \mu \cdot p_{1i}(s) \cdot F_2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s = 0; \\ \sqrt{F_2^2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s + F_3^2(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s} \cdot p_{3i}(s) + \mu \cdot p_{1i}(s) \cdot F_3(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s = 0; \\ s \in \Omega; i = \overline{1, n}; \end{array} \right. \quad (1)$$

$F_1(p_i, \Delta_{1i})$  - относительные нормальные перемещения;  $n$  - число шагов нагружения;

$F_2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i}), F_3(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})$  - скорости относительного проскальзывания;  $\mu$  - коэффициент трения.

2

# Упрощение граничных условий (введение запаздывания контактных давлений)

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{1i}(s) \geq 0; F_1(p_i, \Delta_{1i})_s \geq 0; p_{1i}(s) \cdot F_1(p_i, \Delta_{1i})_s = 0; \\ \sqrt{p_{2i}^2(s) + p_{3i}^2(s)} \leq \mu \cdot \underline{p_{1i-1}(s)}; \\ \sqrt{F_2^2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s + F_3^2(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s} \cdot p_{2i}(s) + \mu \cdot \underline{p_{1i-1}(s)} \cdot F_2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s = 0; \\ \sqrt{F_2^2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s + F_3^2(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s} \cdot p_{3i}(s) + \mu \cdot \underline{p_{1i-1}(s)} \cdot F_3(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s = 0; \\ s \in \Omega; i = \overline{1, n}. \end{array} \right. \quad (2)$$

\_\_\_\_\_ - внесенные в (1) упрощения (запаздывания контактных давлений);

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1(p_i, \Delta_{1i})_s = \sum_{j=1}^3 A_{1j}(p_{ji})_s + \delta_0(s) + \Delta_{1i}; \quad \tilde{\Delta}_{2i}(s) = \Delta_{2i} - \sum_{j=1}^3 A_{2j}(p_{ji-1})_s - \Delta_{2i-1}; \\ F_2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s = \sum_{j=1}^3 A_{2j}(p_{ji})_s + \tilde{\Delta}_{2i}(s); \quad \tilde{\Delta}_{3i}(s) = \Delta_{3i} - \sum_{j=1}^3 A_{3j}(p_{ji-1})_s - \Delta_{3i-1}; \\ F_3(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s = \sum_{j=1}^3 A_{3j}(p_{ji})_s + \tilde{\Delta}_{3i}(s); \end{array} \right.$$

$\Delta_{1i}, \Delta_{2i}, \Delta_{3i}$  - жесткие смещения;  
 $\delta_0(s)$  - начальный зазор;

$$A_{kj}(x)_s = \int_{\Omega} K_{kj}(s, s') \cdot x(s') ds', \quad (k, j = \overline{1, 3}) \text{ - операторы влияния.}$$

# Система нелинейных интегральных уравнений на $i$ -ом шаге нагружения

С помощью функций:

$$h(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0; \\ 0, & \text{если } x < 0; \end{cases} \quad q(x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{если } \sqrt{x^2 + y^2} \leq z; \\ x \cdot \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{если } \sqrt{x^2 + y^2} > z; \end{cases}$$

система соотношений (2) сводится к системе нелинейных интегральных уравнений:

$$\begin{cases} p_{1i}(s) = h(p_{1i}(s) - E \cdot F_1(p_i, \Delta_{1i})_s); \\ p_{2i}(s) = q(p_{2i}(s) - E \cdot F_2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s, p_{3i}(s) - E \cdot F_3(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s, \mu p_{1i-1}(s)); \\ p_{3i}(s) = q(p_{3i}(s) - E \cdot F_3(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s, p_{2i}(s) - E \cdot F_2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s, \mu p_{1i-1}(s)); \\ s \in \Omega; \quad i = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (3)$$

$E$  – произвольная положительная постоянная.

# Дискретный аналог системы (3)

Область  $\Omega$  разбивается на  $l$  граничных элементов, на которых неизвестные контактные напряжения  $p_{1i}(s), p_{2i}(s), p_{3i}(s)$  принимают постоянные значения  $x_{3k-2i}, x_{3k-1i}, x_{3ki}$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{3k-2i} = h(x_{3k-2i} - E \cdot (\sum_{j=1}^{3l} a_{3k-2j} \cdot x_{ji} - b_{3k-2i})); \\ x_{3k-1i} = q(x_{3k-1i} - E \cdot (\sum_{j=1}^{3l} a_{3k-1j} \cdot x_{ji} - b_{3k-1i})), \\ x_{3ki} - E \cdot (\sum_{j=1}^{3l} a_{3kj} \cdot x_{ji} - b_{3ki}), c_{ki}); \\ x_{3ki} = q(x_{3ki} - E \cdot (\sum_{j=1}^{3l} a_{3kj} \cdot x_{ji} - b_{3ki})), \\ x_{3k-1i} - E \cdot (\sum_{j=1}^{3l} a_{3k-1j} \cdot x_{ji} - b_{3k-1i}), c_{ki}); k = \overline{1, l}. \end{array} \right. \quad (4)$$



$a_{kj}$  - элементы матрицы податливости,

$b_{ki}$  определяют условия нагружения и конфигурацию тел,

$c_{ki} = \mu \cdot x_{3k-2i-1}$  - известные на  $i$ -том шаге величины.

# Итерационный процесс для решения системы (4)

При аппроксимации взаимодействующих тел упругими полупространствами и положительно определённой симметрической матрице податливости  $A_0 = \{a_{kj}\}$ ,  $k, j = \overline{1, 3l}$  для приближенного решения системы (4) можно использовать итерационный процесс:

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_{1i}^{(0)}, x_{2i}^{(0)}, \dots, x_{3li}^{(0)}) \in R^{3l}, \quad k = \overline{1, l}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \\ x_{3k-2i}^{(m+1)} = h \left( x_{3k-2i}^{(m)} - E \cdot \left( \sum_{j=1}^{3l} a_{3k-2j} x_{ji}^{(m)} - b_{3k-2i} \right) \right); \\ x_{3k-1i}^{(m+1)} = q \left( x_{3k-1i}^{(m)} - E \cdot \left( \sum_{j=1}^{3l} a_{3k-1j} x_{ji}^{(m)} - b_{3k-1i} \right), x_{3ki}^{(m)} - E \cdot \left( \sum_{j=1}^{3l} a_{3kj} x_{ji}^{(m)} - b_{3ki} \right), c_{ki} \right); \\ x_{3ki}^{(m+1)} = q \left( x_{3ki}^{(m)} - E \cdot \left( \sum_{j=1}^{3l} a_{3kj} x_{ji}^{(m)} - b_{3ki} \right), x_{3k-1i}^{(m)} - E \cdot \left( \sum_{j=1}^{3l} a_{3k-1j} x_{ji}^{(m)} - b_{3k-1i} \right), c_{ki} \right), \end{array} \right. \quad (5)$$



который сходится к единственному решению системы (4) не зависимо от начального приближения при условии:

$$E < \frac{1}{\max_{1 \leq k \leq 3l} \left( \sum_{j=1}^{3l} |a_{kj}| \right)}.$$

# Численные результаты

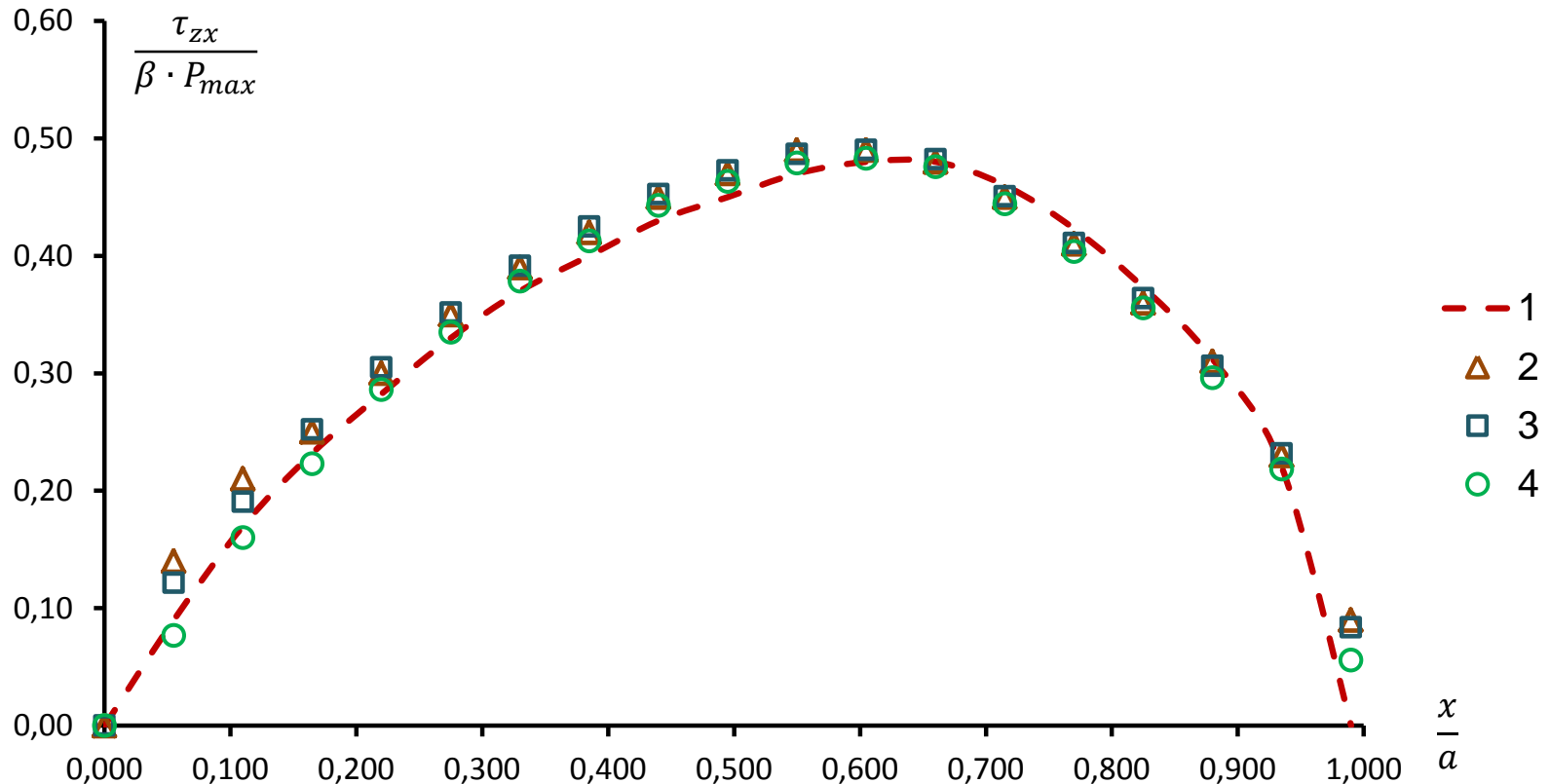
## Задача о вдавлении упругого шара в упругое полупространство

Параметры:  $R = 0,3$  м;  $E_1 = 3 \cdot 10^5$  МПа;  $E_2 = 10^5$  МПа;  $\nu_1 = \nu_2 = 0,2$ ;  $\mu = 0,12375$ .

$\gamma_n = (\Delta_{1n}, 0, 0)$ ,  $\Delta_{1n} = 0,0007$  м - полное нормальное жесткое смещение шара.

### Зависимость безразмерных касательных напряжений от безразмерного расстояния

1 – точное решение; 2 – решение задачи в постановке (1) при 30 равных шагах; 3 – решение задачи в постановке (1) при сгущении шагов в 6 раз на начальном этапе нагружения; 4 – решение задачи в постановке (2) при 60 равных шагах.  $\beta = 0,1875$ ,  $a$  – радиус пятна контакта,  $x$  – расстояние до центра.



# Выводы

Анализ численных результатов свидетельствует о том, что точность приближенного решения задачи в постановке (1) в точках расположенных вблизи центра пятна контакта (решение 2 на графике) можно улучшить за счет уменьшения длительности шагов на начальном этапе процесса нагружения (решение 3 на графике). В упрощённой постановке (2) достаточно высокая точность численного решения задачи (решение 4 на графике) достигается увеличением числа равных шагов нагружения в два раза. Полученные результаты подтверждают предположение о том, что достаточно большую (около 10%) погрешность решения задачи в постановке (1) в точках близких к центру пятна контакта при равномерном нагружении можно объяснить при малых коэффициентах трения высоким градиентом в окрестности точки  $\Delta = 0$  функции  $p_{\max} = C\sqrt{\Delta}$  ( $C$  – константа, зависящая от упругих постоянных и геометрии тел), выражающей согласно классической теории Герца зависимость максимального контактного давления  $p_{\max}$  от величины жесткого сближения тел  $\Delta$ .

