О РАДИАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПОРОУПРУГОГО ЦИЛИНДРА

[1,2]*Ватульян А.О.*, [1,2]*Дударев В.В.*, [1]*Мнухин Р.М.*

[1]Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия,
[2]Южный математический институт, Владикавказ, Россия

В настоящее время в большинстве задач, посвященных исследованию пороупругих тел, используется линейная теория Био [1,2]. При этом одними из наиболее значимых объектов исследования, с точки зрения их практического применения, являются пороупругие трубы, которые широко применяются в инженерных конструкциях.

Рассмотрим задачу об установившихся радиальных колебаниях пороупругого цилиндра. Соответствующая математическая постановка, полученная на основе общей постановки задачи о движении пороупругого тела [1–3], может быть приведена к следующему каноническому виду:

$$\begin{cases} p'(\xi) = -\dfrac{H_\xi(\xi)}{K(\xi)}, \\ H'_\xi(\xi)\theta = -\dfrac{H_\xi(\xi)}{\xi}\theta + \\ +i\kappa\beta a(\xi)\left(u'(\xi) + \dfrac{u(\xi)}{\xi}\right) + i\kappa p(\xi)\eta, \\ u'(\xi) = y(\xi) + \beta a(\xi)p(\xi) - c_2\dfrac{u(\xi)}{\xi}, \\ y'(\xi) = c_1\left[\dfrac{u(\xi)}{\xi^2} - y(\xi) - \beta\dfrac{a(\xi)p(\xi)}{\xi} + \right. \\ \left. +c_2\dfrac{u(\xi)}{\xi^2}\right] - \kappa^2 u(\xi), \\ p(\xi_0) = 0, \\ p(1) = 0, \\ y(\xi_0) = 0, \\ y(1) = p_*, \end{cases}$$

где введены следующие безразмерные функции и параметры: $r = r_2\xi$ – радиальная координата, $P(r) = P^* p(\xi)$ – внутрипоровое давление, $K(r) = K_0 K(\xi)$ – коэффициент проницаемости среды $H(r) = K_0 P^* / r_2 H_\xi(\xi)$ – поток, $U(r) = r_2 u(\xi)$ – функция смещения, $A(r) = A^* a(\xi)$ – модуль Био, $Y(r) = (\lambda + 2\mu)U' + \lambda U(r)/r - A(r)P(r) = (\lambda + 2\mu)y(\xi)$ – функция обобщенного напряжения, r_1, r_2 – внутренний и внешний радиусы цилиндра соответственно, ω – частота установившихся колебаний, ρ – плотность тела, λ, μ – параметры Ламе, p_0 – амплитуда поверхностной нагрузки, возбуждающей колебания, R – гидростатическая константа, φ – пористость,

$$\theta = P^{*2}K_0\sqrt{\rho r_2^2} \Big/ \left(r_2^2(\lambda + 2\mu)^{3/2}\right), \ \xi_0 = r_1 / r_2,$$

$$\eta = \frac{\varphi^2(P^*)^2}{R(\lambda + 2\mu)}, \quad \beta = \frac{A^* P^*}{\lambda + 2\mu}, \quad \kappa^2 = \frac{\rho\omega^2 r_2^2}{\lambda + 2\mu},$$

$$c_1 = \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu}, \ c_2 = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}, \ p_* \frac{p_0}{\lambda + 2\mu}.$$

Решение представленной системы осуществлено численно с помощью метода пристрелки в пакете компьютерной алгебры Maple. Благодаря введенным безразмерным параметрам удалось преодолеть основную сложность реализации точного численного решения, а именно, применение математических операций одновременно с большими и малыми значениями параметров исходной системы, отличающихся по величине в системе СИ на несколько порядков. Оценка точности составленной численной схемы проведена путем сравнения значений функции смещения u, вычисленных для частного случая постоянных значений параметров задачи, со значениями u, вычисленными с помощью известного аналитического решения.

На основе предложенного численного подхода проведен подробный анализ влияния значений основных параметров задачи, таких как пористость, модуль Био, коэффициент проницаемости среды, а также функции давления на величину поля смещения и амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) цилиндра для различных частотных диапазонов. В частности, выявлено существенное влияние величины модуля Био на АЧХ. Этот факт может быть положен в основу решения обратной коэффициентной задачи об определении функции распределения $a(\xi)$ по данным акустического зондирования [3].

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России № 9.665.2014/K.

ЛИТЕРАТУРА

1. Biot M.A. General theory of three-dimensional consolidation // Journal of Applied Physics. – 1941. –v.12,N2. – P. 155 – 164.
2. Coussy O. Poromechanics. John Wiley & Sons, 2004. – 312 p.
3. Ватульян А.О., Ляпин А.А. Об обратных коэффициентных задачах пороупругости // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2013. – №2. – С. 114–121.