

**РОЗРАХУНОК АНАЛІТИЧНИМ МЕТОДОМ  
НЕСКІНЧЕНОЇ ПОЛОСИ НА ЖОРСТКІЙ ОСНОВІ ПІД  
ЗОСЕРЕДЖЕНОЮ СИЛОЮ**

*Гуртовий О.Г., Тинчук С.О.*

Національний університет водного господарства та  
природокористування, Рівне, Україна.

Оцінка міцності та жорсткості однорідних та неоднорідних композитних, особливо багатошарових, покриттів зводяться до аналізу їх НДС, як плит, що контактують із основою. Це стосується розрахунку дорожнього багатошарового одягу на достатньо жорстких мостових, тунельних та інших конструкціях транспортних споруд, захисних багатошарових покриттів плоских елементів конструкцій та деталей, функціональних покриттів робочих поверхонь різного обладнання, зокрема емалевих покриттів корпусів хімічних апаратів тощо. Тому достовірне визначення НДС плит на жорстких основах при дії поперечного навантаження є актуальною задачею.

Об'єднання матеріалів з ізотропними та трансверсально-ізотропними фізичними характеристиками в багатошаровий пакет дозволяє створювати багатофункціональні конструкції. НДС таких конструкцій, зважаючи на їх структурну неоднорідність та відносно низьку поперечну жорсткість окремих шарів, суттєво пов'язаний з впливом деформацій поперечного зсуву та деформацій поперечного обтиснення. Тому актуальною є задача уточненого моделювання НДС плит, яка б враховувала ці види деформацій. Потрібно відмітити, що застосування класичної теорії пластин чи уточнених поперечно-зсувних моделей призводить до тривіально-нульового розв'язку для НДС поперечно навантажених плит на жорсткій основі.

Відомі уточнені моделі НДС [1, 2], що враховують поперечні зсуви та поперечне обтиснення, зорієнтовані переважно на описання згинового НДС, тоді як у плитах на жорсткій основі переважає беззгинова складова НДС. Отже, потрібне використання уточненої моделі, яка б з високою точністю описувала беззгинову складову НДС плити на жорсткій основі.

В роботі [3] запропоновано гіпотези та побудована спеціальна модель беззгинового деформування однорідної та шаруватої плити, яка в поєднанні з моделлю згинового деформування дає результати, що близькі до точного тривимірного розв'язку. В роботах [4, 5]

розглянуті структурно-континуальні моделі НДС поперечно навантажених плит, в яких ідея ітераційного моделювання [3], застосована для плит на жорсткій основі. Проте в даних роботах розглянуті задачі при дії на плиту синусоїдального навантаження.

Метою даної роботи є з використанням підходів до моделювання НДС плит на жорсткій основі [3-5] показати можливість отримання аналітичного розв'язку на прикладі нескінченної плити під зосередженою силою.

Розглядається задача плоскої деформації багат шарової нескінченної  $-\infty \leq x_1 \leq \infty$  плити на жорсткій основі під дією розподіленого навантаження інтенсивністю  $F$  по лінії  $x_1 = 0$ . При розв'язку використовується підхід оптимізації розрахункової схеми плити [5], для чого плита симетрично добудовується відносно поверхні контакту даної плити з основою. Плита буде у цьому випадку двосторонньо симетрично навантаженою відносно серединної поверхні плити, а товщина плити збільшиться вдвоє  $H = 2h$ . При цьому, контакт плити з основою відповідає умовам проковзування без тертя.

Запропонований підхід дозволяє оптимізувати розглянуту в [4] уточнену модель НДС плити, яка складалася з двох якісно відмінних НДС – згинового і беззгинового. Згинова складова НДС зникає, оскільки НДС в симетричній за структурою плиті при двосторонньому симетричному навантаженні повністю описується беззгиновим НДС.

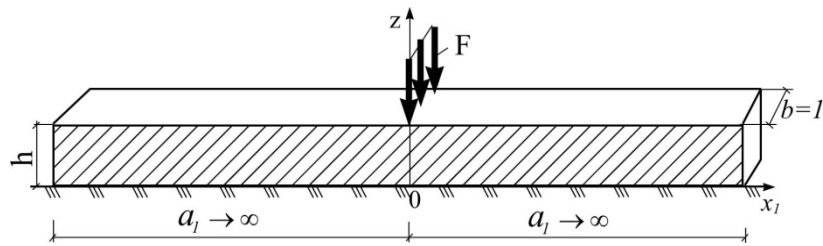


Рис. 1. Розрахункова схема нескінченної плити на жорсткій основі

Для розрахунку НДС полоси плити одиничної ширини (рис.1) використаємо уточнену модель [5] при утриманні в ній двох невідомих функцій поперечного обчислення  $\gamma_1$  та  $\gamma_2$  і однієї функції

поперечного зсуву  $\beta_{11}$  та функції тангенціальних зміщень  $v_1$  на поверхні контакту плити з основою в напрямку  $Ox_1$  у вигляді:

$$\begin{aligned} u_3^{(k)} &= \psi_{31,3}^{(k)} \gamma_1 + \psi_{32,3}^{(k)} \gamma_2; \\ u_1^{(k)} &= v_1 - \psi_{31}^{(k)} \gamma_{1,1} - \psi_{32}^{(k)} \gamma_{2,1} - \psi_{11}^{(k)} \beta_{11}. \end{aligned} \quad (1)$$

Гіпотетично задані функції  $\psi_{3l}^{(k)}$ ,  $\psi_{11}^{(k)}$ , що моделюють розподіл зміщень за координатою  $z$  мають вигляд [5]:

$$\begin{aligned} \psi_{31,3}^{(k)} &= \int_0^z a_{3333}^{(s)} F_1^{(s)} dz; \quad \psi_{32,3}^{(k)} = \int_0^z a_{3333}^{(s)} dz; \quad s = \overline{1, k}; \\ \psi_{11}^{(k)} &= -\int_0^z a_{1313}^{(s)} f_{11}^{(s)} dz; \quad \psi_l^{(k)} = \int_0^z \psi_{l,3}^{(s)} dz; \quad l = 1, 2, \end{aligned} \quad (2)$$

які для випадку однорідної плити запишуться у вигляді:

$$\begin{aligned} \psi_{31,3} &= A_{1111} a_{3333} H^5 (48\xi^5 - 40\xi^3 + 15\xi) / 5760; \quad \xi = z / H; \\ \psi_{32,3} &= a_{3333} H \xi; \quad \psi_{32} = a_{3333} H^2 \xi^2 / 2; \quad H = 2h; \\ \psi_{31} &= A_{1111} a_{3333} H^6 (16\xi^6 - 20\xi^4 + 15\xi^2) / 11520; \\ \psi_{11} &= -A_{1111} a_{1313} H^4 (2\xi^4 - \xi^2) / 48, \end{aligned} \quad (3)$$

де  $A_{\alpha\beta\gamma\delta}$  та  $a_{\alpha\beta\gamma\delta}$  – коефіцієнти закону Гука  $\sigma_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta\gamma\delta} e_{\gamma\delta}$  і  $e_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta\gamma\delta} \sigma_{\gamma\delta}$ . Тут і надалі диференціювання по  $x_\alpha$  позначено нижніми індексами після коми.

Загальний розв'язок, відповідно до методики [6], запишемо у вигляді:

$$v_1 = \bar{A} \cdot e^{kx}; \quad \gamma_1 = \bar{B} \cdot e^{kx}; \quad \gamma_2 = \bar{C} \cdot e^{kx}; \quad \beta_{11} = \bar{D} \cdot e^{kx}. \quad (4)$$

Підставивши (4) в однорідну систему розрахункових рівнянь в зміщеннях  $[L] \cdot [u] = [p]$  із [5], отримаємо характеристичне рівняння у вигляді матриці  $4 \times 4$ :

$$\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{vmatrix} = 0, \quad (5)$$

коефіцієнти характеристичного рівняння мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 L_{11} &= -k^2 B_0; \quad L_{12} = -L_{21} = k^3 B_{31} - kP_1; \quad L_{13} = -L_{31} = k^3 B_{32} - kP_2; \\
 L_{14} &= L_{41} = k^2 B_{11}; \quad L_{22} = k^4 D_{11}^{33} - k^2 (H_{11}^3 + J_{11}^3) - R_{11}; \\
 L_{23} &= L_{32} = k^4 D_{12}^{33} - k^2 (H_{12}^3 + J_{12}^3) - R_{12}; \quad L_{24} = -L_{42} = k^3 D_{11}^{31} - kH_{11}^1; \\
 L_{33} &= k^4 D_{22}^{33} - k^2 (H_{22}^3 + J_{22}^3) - R_{22}; \quad L_{34} = -L_{43} = k^3 D_{21}^{31} - kH_{12}^1; \\
 L_{44} &= -k^2 D_{11}^{11} + T_{11}^1. \quad (6)
 \end{aligned}$$

Сталі коефіцієнти в рівняннях (5) і (6) є узагальненими фізико-геометричними характеристиками плити і визначаються наступним чином:

$$\begin{aligned}
 B_0 &= \int_{-b_n}^{b_n} A_{1111} dz; \quad B_{\alpha s} = \int_{-b_n}^{b_n} A_{1111} \psi_{\alpha s} dz; \quad P_t = \int_{-b_n}^{b_n} A_{1133} \psi_{3t, 33} dz; \\
 D_{fs}^{\alpha \mu} &= \int_{-b_n}^{b_n} A_{1111} \psi_{\alpha f} \psi_{\mu s} dz; \quad \alpha, \mu = 1, 3; \quad s, f = \overline{1, 2}; \\
 J_{ft}^\alpha &= \int_{-b_n}^{b_n} A_{1133} \psi_{\alpha f} \psi_{3t, 33} dz; \quad H_{ts}^\alpha = \int_{-b_n}^{b_n} A_{1133} \psi_{3t, 33} \psi_{\alpha s} dz; \\
 R_{tq} &= \int_{-b_n}^{b_n} A_{3333} \psi_{3t, 33} \psi_{3q, 33} dz; \quad T_{11}^1 = \int_{-b_n}^{b_n} G' \psi_{11, 3} \psi_{11, 3} dz; \quad t, q = \overline{1, 2}, \quad (7)
 \end{aligned}$$

де  $b_n = H/2 = h$  – координата верхньої поверхні плити.

Характеристичне рівняння (5), наприклад, для випадку однорідної ізотропної плити з  $E = 1 \cdot 10^4$  МПа;  $\nu = 0,25$  запишеться у вигляді:

$$5,296 \cdot 10^{-6} k^{12} - 7,747 \cdot 10^{-2} k^{10} + 1,007 k^8 - 143,62 k^6 + 878,66 k^4 - 4408,2 k^2 = 0.$$

Розв'язком характеристичного рівняння (5) будуть: два нульові корені  $k_1 = k_2 = 0$ ; чотири пари комплексно спряжених коренів  $k_3 = -k_4 = a - ib$ ;  $k_5 = -k_6 = a + ib$ ;  $k_7 = -k_8 = c - id$ ;  $k_9 = -k_{10} = c + id$ , а також два дійсні корені  $k_{11} = -k_{12} = f$ .

Загальний розв'язок, наприклад, для функції  $v_1$  (функції змішень на поверхні ковзкого контакту плити з основою) запишеться у вигляді:

$$v_1 = C_1 + C_2 x + e^{ax}(C_3 \cos bx + C_5 \sin bx) + e^{-ax}(C_4 \cos bx + C_6 \sin bx) + e^{cx}(C_7 \cos dx + C_9 \sin dx) + e^{-cx}(C_8 \cos dx + C_{10} \sin dx) + C_{11} e^{fx} + C_{12} e^{-fx}, \quad (8)$$

де  $C_\mu$  ( $\mu = \overline{1, 12}$ ) – сталі інтегрування, що визначаються із граничних умов.

Оскільки розглядається нескінченно довга полоса плити одиничної ширини при «зосередженому» навантаженні  $F$ , то для точок, суттєво віддалених від місця прикладання сили  $F$ , зміщення  $u_\alpha^{(k)}$  зменшаться до нуля. Це можливо, якщо  $C_2 = C_3 = C_5 = C_7 = C_9 = C_{11} = 0$ . Тоді вираз (8) матиме вигляд:

$$v_1 = C_1 + e^{-ax}(C_4 \cos bx + C_6 \sin bx) + e^{-cx}(C_8 \cos dx + C_{10} \sin dx) + C_{12} e^{-fx}. \quad (9)$$

Подібний вигляд мають розв'язки і для інших шуканих функцій  $\gamma_i$  і  $\beta_{11}$ :

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \bar{B}_4 \cdot e^{-ax}(C_4 \cos bx + C_6 \sin bx) + \bar{B}_8 \cdot e^{-cx}(C_8 \cos dx + C_{10} \sin dx) + \\ &+ \bar{B}_{12} \cdot C_{12} e^{-fx}; \\ \gamma_2 &= \bar{C}_4 \cdot e^{-ax}(C_4 \cos bx + C_6 \sin bx) + \bar{C}_8 \cdot e^{-cx}(C_8 \cos dx + C_{10} \sin dx) + \\ &+ \bar{C}_{12} \cdot C_{12} e^{-fx}; \\ \beta_{11} &= \bar{D}_4 \cdot e^{-ax}(C_4 \cos bx + C_6 \sin bx) + \bar{D}_8 \cdot e^{-cx}(C_8 \cos dx + C_{10} \sin dx) + \\ &+ \bar{D}_{12} \cdot C_{12} e^{-fx}. \end{aligned} \quad (10)$$

Для відшукання інших сталих інтегрування необхідно задовольнити граничні умови в поперечному перерізі під силою  $F$  посередині плити (при  $x_1 = 0$ ):

$$\text{– кінематичні умови: } v_1 = 0; \quad \gamma_{1,1} = 0; \quad \gamma_{2,1} = 0; \quad \beta_{11} = 0; \quad (11)$$

$$\text{– статичні умови: } M_{11,1}^{[13]} - Q_1^{[13]*} = 0; \quad M_{11,1}^{[23]} - Q_3^{[23]*} = 0, \quad (12)$$

де  $M_{11}^{[r3]}$  – узагальнений згинний момент :

$$M_{11,1}^{[t3]} = \int_{-b_n}^{b_n} \sigma_{11,1}^{(k)} \psi_{3t}^{(k)} dz; \quad t=1, 2; \quad (13)$$

$Q_t^{[t3]*}$  – узагальнена поперечна сила в центрі плити:

$$Q_t^{[t3]*} = F \cdot \psi_{3t,3}^{(n)}, \quad \text{при } z = h. \quad (14)$$

Для кожного з коренів  $k_\mu$  ( $\mu=1, 12$ ) із характеристичного рівняння (5) знаходяться значення коефіцієнтів  $\bar{A}_\mu=1$ ,  $\bar{B}_\mu$ ,  $\bar{C}_\mu$  та  $\bar{D}_\mu$  в (4), а потім із системи рівнянь (11), (12) отримуємо шуканий розв'язок для сталих інтегрування  $C_\mu$ .

Розв'язок даної задачі містить тільки загальний розв'язок і має затухаючий характер при  $x_1 \rightarrow \infty$ .

Для полоси шириною  $b=1$  м ізотропної плити з  $E=1 \cdot 10^4$  МПа;  $\nu=0,25$ , вертикальні зміщення в поперечному перерізі при  $x_1=0$  та  $F=10$  кН/м показано в табл. 1 (варіант В1).

Таблиця. 1

Величина прогину в нескінченній плиті (в перерізі при  $x_1=0$ )

Варіанти	$z/h$	1	0,8	0,5	0
В1	$u_3$ ,	55,93	22,32	10,16	0
В2	мм	57,67	24,09	11,83	0

Також розглянута задача для нескінченної ізотропної плити з такими ж пружними характеристиками, але з дефектом розшарування при  $z/h=0,5$ , що моделюється введенням тонкого трансферсально-ізотропного шару  $h_d^{(2)} = h/200$  ( $0,5h \leq z \leq 0,505h$ ) з характеристиками пружності  $E'_d = E^{(1)}$ ;  $E_d = E^{(1)}/10^3$ ;  $\nu_d = \nu'_d = 0$ ;  $G_d = G'_d = E_d/2$  (варіант В2 в табл. 1).

З результатів розрахунку (табл. 1) видно, що введення шару проковзування дещо збільшує величину прогину  $u_3$  під навантаженням.

Запропонована методика дозволяє отримувати аналітичні розв'язки як для однорідних, так і багат шарових плит на жорсткій основі при дії зосередженого навантаження. Вводячи в плиту шари різної жорсткості, можна моделювати різні умови контакту, як між шарами плити так і на поверхні контакту плити з основою.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Пискунов В. Г. Об одном варианте неклассической теории многослойных пологих оболочек и пластин / В. Г. Пискунов // Прикладная механика. – 1979. – Т. 15, № 11. – С.76–81.
2. Рассказов А. О. К теории многослойных ортотропных пологих оболочек / А. О. Рассказов // Прикладная механика. – 1976. – Т. 12, № 11. – С. 50 – 56.
3. Гуртовий А. Г. Высокоточное моделирование деформирования слоистых структур / А. Г. Гуртовий // Механика композитных материалов. – 1999. – Т. 35, № 1. – С. 13–28.
4. Гуртовий О.Г. Задача поперечного деформування трансверсально-ізо트로пної плити при контакті з абсолютно жорсткою основою / О.Г. Гуртовий, С.О. Тинчук // Зб. наук. праць – Вісник УДУВГП – Рівне УДУВГП. – 2004. – Випуск 2 (26). – с.222-229.
5. Гуртовий А. Г. Безызгибная уточненная модель деформирования многослойных плит на недеформируемом основании / А. Г. Гуртовий, С. А. Тинчук // Механика композитных материалов. – 2006. – Т. 42, № 5. – С. 643–654.
6. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов, Т. 2: Учебное пособие для втузов / Н.С. Пискунов. – 13-е изд. – М.: Наука, 1985. – 560с.