СИММЕТРИЯ В ПРОБЛЕМЕ СДВИГА КОМПОЗИТОВ

Федоров В. А.

Национальный технический университет
«Харьковский политехнический институт»,
Харьков, Украина.

Эффективность решения задач микромеханики и гомогенизации свойств композита предопределяется использованием минимальной представительной ячейки, на которой решается краевая задача. Для композитов с тремя плоскостями симметрии строения в условиях такого же симметричного нагружения принцип Кюри [1] позволяет сформулировать условия симметрии искомых механических полей, а также, локализовав их на краях минимальной ячейки, ячейки симметрии $0 \le x_1 \le a_1$, $0 \le x_2 \le a_2$, $0 \le x_3 \le a_3$ (на рис. 1 затемнена) получить краевые условия для краевой задачи микромеханики на этой ячейке.

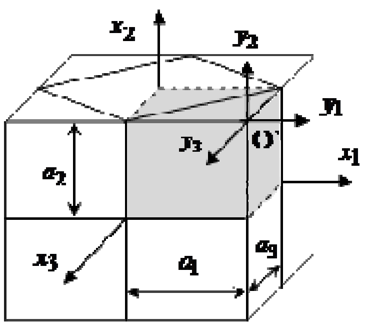

Рис. 1. Ячейка периодичности с ячейкой симметрии

Проблемным является случай нагружения композита касательным макронапряжением $\tilde{\tau}_{12}$, т.е. антисимметрично относительно указанных плоскостей, когда принцип Кюри не позволяет сформулировать краевую задачу на ячейке симметрии.

Однако в докладе формулируется краевая задача микромеханики для сдвига на такой ячейке. Для этого все элементы точечной симметрии механических полей делятся на индуцированные, следующие из принципа Кюри:

$$S_{\text{in}} = \{1, m_3, 2_3\} \tag{1}$$

и продуцированные, следующие из теоремы [2]:

$$S_{\text{pr}} = \{\underline{m}_1, \underline{m}_2\}. \tag{2}$$

Здесь используется международная нотация, модифицированная индексами, означающими оси, относительно которых осуществляется преобразование симметрии.

Группа симметрии механических полей

$$S = S_{\text{in}} \cup S_{\text{pr}}. \tag{3}$$

записанная в локальной форме на координатных плоскостях систем $x_1x_2x_3$ и $y_1y_2y_3$ (см. рисунок) позволяет сформулировать граничные условия на минимальной представительной ячейке:

$$\begin{aligned}
&U_2(0,x_2,x_3) = U_1(x_1,0,x_3) = U_3(x_1,x_2,0) = 0,\\
&\sigma_1(0,x_2,x_3) = \tau_{31}(0,x_2,x_3) = 0,\\
&\sigma_2(x_1,0,x_3) = \tau_{23}(x_1,0,x_3) = 0,\\
&\tau_{23}(x_1,x_2,0) = \tau_{31}(x_1,x_2,0) = 0,\\
&U_1(x_1,a_2,x_3) = U^{\Gamma},\\
&U_2(a_1,x_2,x_3) = U_3(x_1,x_2,a_3) = 0,\\
&\sigma_1(a_1,x_2,x_3) = \tau_{31}(a_1,x_2,x_3) = 0,\\
&\sigma_2(x_1,a_2,x_3) = \tau_{23}(x_1,a_2,x_3) = 0,\\
&\tau_{23}(x_1,x_2,a_3) = \tau_{31}(x_1,x_2,a_3) = 0,
\end{aligned} \tag{4}$$

Также указанные условия и обобщенная формулировка вариационных принципов Лагранжа и Кастильяно [3,4] с функционалами вида

$$\begin{aligned}
L &= \iiint\limits_V (W - \boldsymbol{F} \bullet \boldsymbol{U})dV - \iint\limits_S \boldsymbol{p} \bullet \boldsymbol{U}^{\text{var}} dS\\
K &= \iiint\limits_V w dV - \iint\limits_S \boldsymbol{p}^{\text{var}} \bullet \boldsymbol{U} dS
\end{aligned} \tag{5}$$

позволяет доказать, что гомогенизация модуля сдвига на «бесконечной» ячейке с силовым нагружением дает нижнюю границу $\tilde{G}_{12}^{(F)}$ для точного значения $\tilde{G}_{12}$, а с кинематическим нагружением – верхнюю границу $\tilde{G}_{12}^{(K)}$, которые вместе лежат внутри интервала Рейсса – Фойгта:

$$\tilde{G}_{12}^{(R)} \le \tilde{G}_{12}^{(F)} \le \tilde{G}_{12} \le \tilde{G}_{12}^{(K)} \le \tilde{G}_{12}^{(V)}, \tag{6}$$

где $\tilde{G}_{12}^{(R)}$ и $\tilde{G}_{12}^{(V)}$ – оценки модуля сдвига по Рейссу и по Фойгту, соответственно. «Бесконечной» ячейкой называем достаточно большой параллелепипедный ансамбль ячеек периодичности, нагруженный на своей поверхности либо макронапряжением (силовое нагружение), либо макродеформацией (кинематическое нагружение).

Использование полученной здесь постановки краевой задачи позволяет на несколько порядков сократить трудоемкость ее решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Curie P. Sur la symetrie dans les phenomenes physiques, symetrie d'un champ electrique et d'un champ magnetique // J. Phys. (Paris). - 1894. - Vol. 3. - P. 393-415.
2. Федоров В. А. О симметрии напряженно-деформированного состояния симметричных тел при антисимметричном нагружении // Доклады Национальной академии наук Украины. - 2004. - № 9. - С. 55-59.
3. Fedorov V. A. Symmetry in a problem of transverse shear of unidirectional composites // Composites B. - 2014. - Vol. 56. - P. 263-269.
4. Fedorov V. A. Symmetry in a problem of shear of composites // Mech Compos Mater. - 2015. - Vol. 51, № 3. - P. 265-276.