СПИРАЛЬНОСТЬ КОЛЬЦЕВОГО ВИХРЯ, ЗАКРУЧЕННОГО ВОКРУГ СВОЕЙ ОСИ

[1,2]*Банникова Е.Ю.*, [1,2]*Конторович В.М.*, [2]*Пославский С.А.*

[1] Радиоастрономический институт Национальной академии наук Украины, Харьков
[2] Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Харьков, Украина

Рассматривается интеграл спиральности для тонкого кольцевого вихря при наличии орбитального движения жидкости внутри ядра вихря. Показано, что выражение интеграла спиральности через циркуляции скорости вдоль окружностей, которые являются направляющей тора и его образующей, зависит от характера распределения азимутальной скорости в ядре вихря. В случае неоднородной закрутки эта связь отличается от известного соотношения Моффата – удвоенного произведения таких циркуляций, умноженного на число зацеплений.

В природе кольцевые гидродинамические вихри часто обладают «закруткой» – ненулевой азимутальной составляющей скорости [1]. Такими, по-видимому, являются присоединённые кольцевые вихри тропических циклонов, ураганов и торнадо, солнечные тороидальные вихри и многие другие. При наличии закрутки возникает топологический интеграл спиральности, характеризующий заузленность вихревых линий [2].

Как известно, для двух зацеплённых вихревых контуров спиральность равна произведению циркуляций, умноженному на удвоенное число зацеплений [1,2]. Однако в общем случае связь спиральности с циркуляциями по «скелетным» контурам компактного вихря может оказаться сложнее.

В данной работе обсуждается выражение интеграла спиральности кольцевого вихря через значения циркуляции скорости Γ по малому контуру, охватывающему вихревое кольцо один раз, и циркуляции Γ_1 по большому контуру, совпадающему с круговой направляющей тора.

Рассматриваются частные решения уравнения Брэгга-Хотторна [1] (или Грэда-Шафранова в МГД случае [3]) относительно функции тока Стокса $\psi(r,z)$ для стационарного осесимметричного течения с закруткой идеальной несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=r^2\frac{d\Pi}{d\psi}-f\frac{df}{d\psi},$$

где Π и f^2 линейно зависят от ψ [3]; $\Pi(\psi)=p/\rho+V^2/2$ – интеграл Бернулли, $f(\psi)=rV_\varphi$ – момент азимутальной скорости относительно оси вихря. Решение внутри тонкого кольцевого вихря имеет вид

$$\psi\simeq\frac{1}{2}\phi_0R^2(\alpha-1)\left[z^2+(r-R)^2\right],$$

где R – большой радиус тора, α – безразмерная константа, ϕ_0 – размерный нормировочный множитель. Поверхности тока в данном решении представляют собой вложенные торы с общей круговой осью – направляющей $r=R,\ z=0$.

В случае однородной закрутки $f(\psi)\equiv f_0=Const$ и для спиральности $S=\int\mathbf{V}\cdot rot\mathbf{V}dV$ получается привычное выражение $S=\pm2\Gamma\Gamma_1$.

Если же закрутка в ядре кольцевого вихря неоднородна, то выражение спиральности через циркуляции имеет вид

$$S=\pm k\Gamma\Gamma_1,$$

где коэффициент пропорциональности может изменяться в пределах $4/3\le k<\infty$. Случаю $k=2$ отвечает однородная закрутка, а случаям $4/3\le k<2$ и $2<k<\infty$ – неоднородная закрутка соответственно с максимумом и с минимумом азимутальной скорости на круговой направляющей тора.

Поясним полученные результаты следующими рассуждениями на примере неоднородной закрутки с максимумом ее скорости на круговой оси тора. Если, не изменяя значения спиральности, заменить непрерывное распределение завихренности дискретным, отделив азимутальную составляющую от полоидальной (меридиональной), то получим картину из двух семейств зацепленных вихревых нитей.

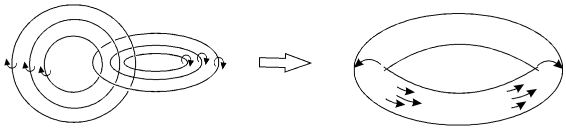

Рис.1. Переход от дискретной системы зацепленных вихревых нитей к тороидальному вихрю с неоднородной закруткой

Не все пары парциальных нитей, принадлежащих разным семействам, оказались зацепленными. В этом заключается причина того, что коэффициент k оказывается в этом случае меньше 2.

Если же закрутка однородна, то все азимутальные (горизонтально расположенные) вихревые нити находятся внутри вихревой пелены, ограничивающей ядро вихря. В этом случае на схеме рис.1 следует оставить только одну меридиональную (вертикально расположенную) круговую нить, а именно нить с наибольшим радиусом. Поскольку теперь зацепление «полное», то $k = 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сэффмэн Ф.Дж. Динамика вихрей. М.: Научный мир. – 2000. – 375 с.
2. Moffatt H.K., Tsinober A. Helicity in laminar and turbulent flow. // Annu. Rev. Fluid Mech. – 1992. – V. 24. – P. 281-312.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. – М. : Наука, 1982. – 624 с.