УДК 532.593

ГЕНЕРАЦИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН ПРИ ДЕЙСТВИИ РАЗНЕСЕННЫХ ДОННЫХ ИСТОЧНИКОВ И ДВУМЯ ПОСЛЕДУЮЩИМИ ВО ВРЕМЕНИ РАЗЛИЧНЫМИ ИМПУЛЬСАМИ

И.Т. Селезов[1], В.Н. Кузнецов[2], Д.О. Черников[1]

[1]Институт гидромеханики НАН Украины, Киев, Украина

[2]Днепропетровский Национальный Университет железнодорожного транспорта им. Лазаряна, Днепропетровск, Украина

Рассмотрена задача о распространение поверхностных гравитационных волн при возбуждении двух одновременных разнесенных на некотором расстоянии донных источниках с дальнейшим влиянием на это распространение волн последующими во времени двумя импульсами. Задача рассматривается в потенциальной постановке для каждого источника и общее решение получается суперпозицией этих решений. Применяется интегральное преобразование Ханкеля по радиальной координате и преобразование Лапласа по времени с последующим численным обращением. Представлены и анализируются численные результаты. Показано, что повторные во времени импульсы как усиливают генерацию волн, так и их ослабляют, что существенно для возбуждения и распространения волн цунами подводными землетрясениями.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: слой жидкости, волны на свободной поверхности, повторная генерация волн

Розглянута задача поширення поверхневих гравітаційних хвиль при порушенні двох одночасних рознесених на деякій відстані донних джерелах з подальшим впливом на це поширення хвиль послідовними в часі двома імпульсами. Задача розглядається в потенційній постановці для кожного джерела і загальне рішення виходить суперпозицією цих рішень. Застосовується інтегральне перетворення Ханкеля по радіальної координаті і перетворення Лапласа за часом з наступним письмовим зверненням. Представлені і аналізуються чисельні результати. Показано, що повторні в часі імпульси як посилюють генерацію хвиль, так і їх послаблюють, що істотно для збудження і поширення хвиль цунамі рухливими землетрусами.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: шар рідини, хвилі на вільній поверхні, повторна генерація волн

Examination of surface gravity waves excited by two simultaneous spaced at a distance of bottom springs with further influence on the propagation of waves is folowed in time pulses. The problem is considered in the potential setting for two sources and the general solution is obtained by superposition of these solutions. Apply the integral Hankel transform along the radial coordinate and the Laplace transform in time, followed by a written appeal. Presented and analyzed the numerical results. It has been shown that repeated pulses in time as strengthen the generation of waves and their weakening, which is essential for the generation and propagation of tsunami waves moving earthquakes.

KEY WORDS: liquid layer, waves on the free surface, waves reiterate generation

ВВЕДЕНИЕ Обзор и подробная библиография по вопросам современной тории построения генерации океанических волн приведена в монографиях [1-3]. Систематические данные наблюдений за цунами и другими явлениями распространения волн в мировом океане изложена в монографиях [6,12], а также в работах [9,10,13,15], близкие по тематике к данной работе авторов. Задача о движении жидкости конечной глубины и определение формы свободной поверхности в процессе возмущений, вызванных изменением поверхности дна, представляет большой интерес в различных областях и прежде всего в океанологии, в связи с землетрясениями и вулканической деятельностью. Проблема описания волновых движений в океанологии в настоящее время интенсивно исследуется в основном с целью предсказания возникновения цунами, последствий и поиска путей смягчения их воздействия на береговую зону.

В работе [4] рассматривается задача об определении формы свободной поверхности слоя жидкости в рамках классической постановки теории линейных волн Коши-Пуассона для идеальной жидкости. Предложенный в этой работе метод сводит рассмотрение задачи к решению интегрального или интегро-дифференциального уравнения для некоторой функции на свободной поверхности. В более общем случае решение может быть получено с помощью теории интегральных преобразований [7,14].

В данном сообщении рассматривается задача генерации волн на поверхности жидкости конечной глубины двумя одновременными донными возмущениями, которые включаются в начальный момент времени $t \geq 0$. На это возмущение через некоторые промежутки времени $t_n > t \ \ (n = 1{,}2)$, начинают влиять сперва одно, а затем второе возмущение дна.

Для решения задачи используются интегральные преобразования Ханкеля и Лапласа. Преобразование Ханкеля обратно самому себе и поэтому для него не требуется специальных таблиц обратных преобразований. Переход в пространство оригиналов от преобразования Лапласа осуществляется численным методом.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ Рассматриваем в цилиндрической системе координат (r, θ, z) область D, заполненную невязкой несжимаемой жидкостью плотностью ρ. Предполагаем, что жидкость ограничена сверху свободной поверхностью $z = 0$ и донной поверхностью $z = -H_0$. В начальный момент времени $t = 0$ жидкость покоится и находится под действием гравитационных сил, направленных в отрицательном направлении оси oz. Также предполагаем, что начальное возмущение генерируется подъемом горизонтального дна одновременно не менее чем в двух местах, с дальнейшем включением по времени $t_n^d > t$ новых возмущений. Представляет интерес исследовать, как эволюционирует свободная поверхность жидкости при действии такого типа возмущений.

Движение предполагается безвихревым, что позволяет ввести потенциал скорости φ, определяемой по формуле $\vec{V} = \vec{N}\varphi$, где $\vec{V}$ - вектор скорости, $\vec{N}$- оператор градиента. Это вместе с условием несжимаемости приводит к уравнению Лапласа для φ. Для решения начально-краевой задачи необходимо также, чтобы при любом t величина $\vec{V}$ исчезала на бесконечности. Из уравнения Бернулли следуют кинематическое условие на свободной поверхности (поверхность должна быть материальной) и динамическое условие – давление на свободной поверхности постоянной.

Математическая постановка начально-краевой задачи сводится к определению потенциала скоростей $\varphi(r,\theta,z,t)$, удовлетворяющих уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)=0; \quad -H_0 \le z \le 0;\ r>0;\ t>0, \tag{1}$$

а также следующим граничным и начальным условиям на свободной поверхности:

$$\left(\frac{1}{g}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{z=0}=0;\ \eta=-\frac{1}{g}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\bigg|_{z=0}; \tag{2}$$

на донной поверхности:

$$\frac{\partial\varphi(r,\theta,z,t)}{\partial z}\bigg|_{z=-H_0}=\frac{\partial\eta^d}{\partial t}; \tag{3}$$

начальные условия:

$$\varphi(r,\theta,z,t)|_{t=0}=\frac{\partial\varphi(r,\theta,z,t)}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\eta^d|_{t=0}=0, \tag{4}$$

где η^d - отклонение дна, η- отклонение свободной поверхности, g – ускорение свободного падения.

Будем предполагать, что возмущение дна осесимметрично, причем при $t=0$ включается возмущение заданное в виде $\eta^d(r,t)=\eta_0\psi(r)f(t)$. При этом если при $t=0$ включается одновременно два возмущения, то функция η_1^d и η_2^d задаются в виде

$$\eta_1^d=\eta_{01}\psi_1(r)f_1(t),\quad \eta_2^d=\eta_{02}\psi_2(r)f_2(t), \tag{5}$$

В дальнейшем вводится безразмерные переменные по формулам (далее черточки опущены)

$$\bar{r}=\frac{r}{r_0},\bar{r_0}=1,\bar{z}=\frac{z}{H_0},\tau=t\frac{C_{sh}}{r_0},\bar{\eta}=\frac{\eta}{\eta_0},\bar{\varphi}=\frac{\varphi}{r_0C_{sh}},\beta=\frac{r_0}{H_0}, \tag{6}$$

Где H_0 - глубина жидкости, r_0- радиус возмущения отклонения дна (характерная величина); C_{sh} - скорость волн на мелкой воде (предельное значение длинноволнового приближения), $C_{sh}=\sqrt{gH_0}$.

Постановка задачи (1)-(4) в безразмерной форме в соответствии с (6) примет вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\beta^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0,-1\le z\le 0,r>0,t>0, \tag{7}$$

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\beta^2\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\bigg|_{z=0}=0,$$

$$\eta=-\frac{1}{g}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\bigg|_{z=0},\beta^2\frac{\partial\varphi}{\partial t}\bigg|_{z=-1}=\frac{\partial\eta^d}{\partial t}. \tag{8}$$

Начальные условия (4) в безразмерной форме в соответствии с (6) остаются без изменения.

МЕТОД РЕШЕНИЯ И АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ. Для решения задачи применяем интегральное преобразование Лапласа по времени t [9]

$$\varphi^L(r,z,s)=\int_0^\infty\varphi(r,z,t)e^{-st}dt, \tag{9}$$

где s– параметр преобразования Лапласа.

После применения (9) к (7)-(8) с учетом начальных условий (4) получаем постановку задачи в пространстве изображений Лапласа

$$\frac{\partial^2\varphi^L}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi^L}{\partial r}+\beta^2\frac{\partial^2\varphi^L}{\partial z^2}=0,-1\le z\le 0,r>0, \tag{10}$$

$$\left(s^2\varphi^L+\beta^2\frac{\partial\varphi^L}{\partial z}\right)\bigg|_{z=0}=0;\ \beta^2\frac{\partial\ddot{o}^L}{\partial z}\bigg|_{z=0}=s\eta_0\psi^d(r)f^{dL}(s). \tag{11}$$

Применим интегральное преобразование Ханкеля по радиальной координате r:

$$\varphi^{LH}(k,z,s)=\int_0^\infty\varphi^L(r,z,s)rJ_0(kr)dr, \tag{12}$$

где k - параметр преобразования Ханкеля.

После применения преобразования (12) к задаче (10), (11), получаем в пространстве изображений Лапласа и Ханкеля следующую задачу:

$$\frac{d^2\varphi^{LH}}{dz^2}-\left(\frac{k}{\beta}\right)^2\varphi^{LH}=0,-1\le z\le 0, \tag{13}$$

$$s^2\varphi^{LH}+\beta^2\frac{d\varphi^{LH}}{dz}\bigg|_{z=0}=0, \tag{14}$$

$$\beta^2\frac{d\varphi^{LH}}{dz}\bigg|_{z=0}=s\eta_0\psi^{dH}(k)f^{dL}(s). \tag{15}$$

Из решения задачи (13)-(15) получаем выражение для потенциала скоростей

$$\varphi^{LH}(k,z,s)=-\frac{1}{2}\frac{s}{\beta k}\eta_0\psi^{dH}(k)f^{dL}(s)\frac{(s^2+\beta k)e^{-\frac{k}{\beta}z}-(s^2-\beta k)e^{\frac{k}{\beta}z}}{s^2ch\frac{k}{\beta}+\beta ksh\frac{k}{\beta}} \tag{16}.$$

В данном сообщении рассматривается задача генерации волн на воде в жидкости конечной глубины несколькими одновременными донными возбуждениями, которые могут отличаться между собой как силой, так и быстротой нарастания и спада.

Предполагалось, что возмущение генерируется подъемом горизонтального дна

$$f_0^d(t)=te^{-\alpha t},\qquad \text{при } t\ge 0; \tag{17}$$

$$f_n^d(t)=te^{-\alpha t}H(\text{t-}t_n^d),\ t>t_n^d\ (n=1{,}2)$$

и одновременным включением нескольких возмущений. В частности, если рассматривается два возмущения, расположенных на расстоянии l, то

$$\psi_1^d(r)=\xi(\xi^2+r^2)^{-\frac{3}{2}},\quad \psi_2^d=\xi(\xi^2+r^2)^{-\frac{3}{2}}H(r-l),\quad \xi>0, \tag{18}$$

где $H(x)$ функция Хэвисайда.

Переход в пространство оригиналов для отклонения свободной поверхности η_n после обращения преобразования Ханкеля в пространстве изображений Лапласа имеет вид

$$\eta_n^L s^2 = \eta_0 f_n^{dL}(s)\int_0^\infty \frac{e^{-\xi\lambda}\lambda J_0(\lambda kr)}{s^2 ch(k\lambda) + \lambda k sh(\lambda k)} d\lambda,$$

$$\text{где } f_0^{dL}(s) = \frac{1}{(s+\alpha)^2},$$

$$f_1^{dL}(s) = \frac{1}{(s+\alpha)^2} \quad \Gamma\left(2, t_1^d(s+\alpha)\right), \qquad (19)$$

$$f_2^{dL}(s) == \frac{1}{(s+\alpha)^2}\Gamma\left(2, t_2^d(s+\alpha)\right),$$

$\Gamma(x)$ – неполная гамма функция.

Численное обращение преобразования Лапласа может проводиться различными методами. В работе [5], исследуется алгоритм обращения с применением рядов Фурье по синусам. В работе [11] рассмотрены методы, основанные на обращении с помощью полиномов Лежандра и Чебышева, рядов Фурье, функций Лагерра.

Здесь для вычисления оригинала применяется метод [8], согласно которому требуются только значения изображения *F(s)* при равностоящих значениях $s = (2n+1)\sigma$, где σ - произвольное число, большее нуля, $\sigma > 0$, а $n = 0,1,\ldots$ Переменная t заменяется на θ и функция $\varphi(\theta)$ под интегралом разлагается в ряд Фурье по функциям $\sin(2v+1)\theta$. Параметр σ при малых t выбирается большим, а при больших t меньшим.

Исследовалось отклонение свободной поверхности $\frac{\eta}{\eta_0}$ для различных удалений от эпицентра $r = 0$ для параметров $\lambda = 2{,}5$, $\xi = 0{,}5$. На рис. 1-3 показаны отклонения свободной поверхности жидкости при четырех возмущениях, причем два возмущения происходят одновременно на расстоянии $l = 4$ друг от друга, а другие два возмущения наступают после прохождения времени $t_n^d > t \; (n = 1,2)$, которые наступают последовательно через некоторый промежуток времени.

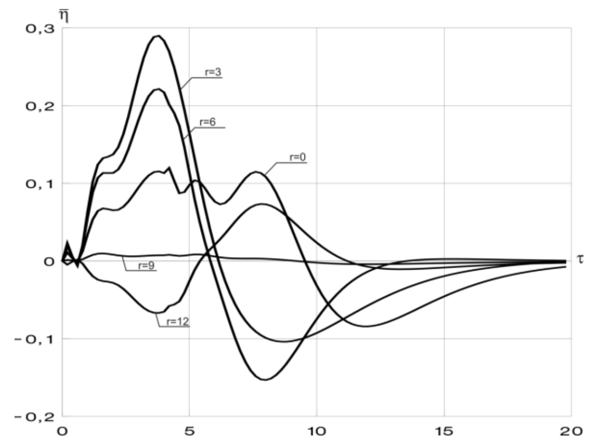

Рис.1. Зависимость отклонения свободной поверхности η от времени t на разных расстояниях от эпицентра при действии четырех возмущений $(r = 0, l = 4, t_1^d = 2, t_2^d = 4)$

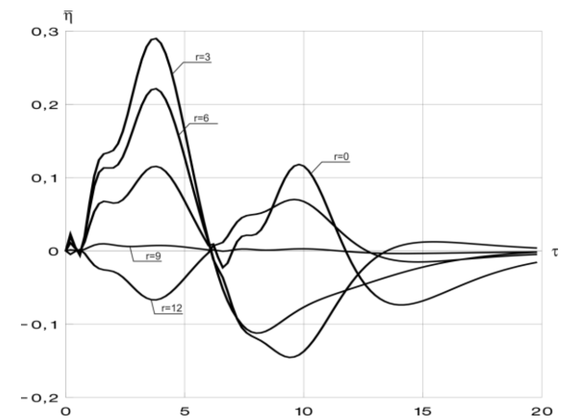

Рис.2. Зависимость отклонения свободной поверхности η от времени t на разных расстояниях от эпицентра при действии четырех возмущений $(r = 0, l = 4, t_1^d = 2, t_2^d = 6)$

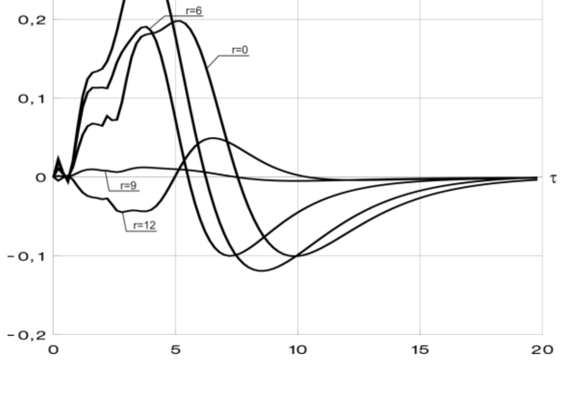

Рис.3. Зависимость отклонения свободной поверхности η от времени t на разных расстояниях от эпицентра при действии трех возмущений $(r = 0,\ l = 6,\ t_1^d = 2, t_2^d = 8)$

ВЫВОДЫ Из сравнения отклонения свободной поверхности жидкости при изменении параметра времени для донного возмущения $(t_1^d = 2,\ t_2^d = 4)$, $\left(t_1^d = 2,\ t_2^d = 6\right)$, $(t_1^d = 2, t_2^d = 8)$ видно, что при увеличении этого параметра происходит увеличение амплитуды отклонения, но «зона спокойствия» продолжает сохранятся $(r = 9)$

ЛИТЕРАТУРА

1. Селезов И.Т. Волновые гиперболические модели распространения возмущений / И.Т.Селезов, Ю.Г.Кривонос.-Киев:Наук.думка, 2015.-172с.
2. Селезов И.Т. Волновые задачи биогидродинамики и биофизики /И.Т.Селезов, Ю.Г.Кривонос.-Киев:Наук.думка, 2013.-308с.
3. Селезов И.Т., Матеманические методы в задачах распространения и дифракции волн /И.Т. Селезов, Ю.Г. Кривонос - Киев: Наук. думка, 2012. - 232 с.

4. Гоман О.Г. Об одном подходе к решению задачи Коши-Пуассона для слоя жидкости конечной глубины /О.Г.Гоман, Е.А.Тихая // Вісник Дніпропетр. Ун-ту. Серія : Механіка. – 2011. – Вин. 15,т.1.- С. 91-97.
5. Крылов В.Н. Методы приближенного преобразования Лапласа / В.Н.Крылов, Н.С.Скобля. – М., 1974. – 224с.
6. Пелиновский Е.Н. Гидродинамика волн цунами / Е.Н. Пелиновский – Нижний Новгород: Ин-т прикл. физики РАН. 1996. – 276 с.
7. Селезов И.Т. Возбуждение и распространение волн на поверхности жидкости при действии разнесенных донных источников /И.Т. Селезов, В.Н. Кузнецов, Д.О. Черников // Прикладна гідромеханіка. – 2014. – 16(88), N1. – С. 53-58.
8. Doetsch G. Anleitung zum Praktischen Gebrauch der Laplace-transformation und der Z-transformation. – Munchen-Wien: R. Oldenburg, 1967.
9. Geist E.L., Titov V.V., Synolakis C.E. Tsunami: Wave of change // Scientific Amer. December. 2005.
10. Kajura K. The leading wave of tsunami // Bull. Earthquake Res. Inst. – 1963. – 42. – P.535-571.
11. Lancroz C. Applied analysis. – Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1956.
То же: Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. – М.: Физматгиз, 1981. – 524 с.
12. Murty T.S. Seismic sea waves tsunami. – Fisheries Research Board of Canada.Bulletin 198. – Catalogue Number: FS94-198, - 1977.
То же: Мурти Т.С. Сейсмические морские волны цунами. – Л.: Гидрометиздат, - 1981. – 448с.
13. Selezov I.T. Modeling of tsunami wave generation and propagation // Int. J. Fluid Mech. Research. 2006.-33.№.1.-p.44-54.
14. Selezov I.T., Kuznetsov V.N., Chernikov D.O. Generation of surface gravity waves by bottom time-repetitive pulses // J. Math. Sci. – 2010. – 171, N 5. – P. 596-602.
15. Weyl P.K. Oceanography. An introduction to the marine environment. – NY: John Wiley and Sons, Inc., - 1970.