ПРИМЕНЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИИ ПРИ РЕШЕНИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Лысянская А.В., Гаевкая В.А.

Харьковский национальный университет строительства и архитектуры, Харьков, Украина

Метод подстановки при решении алгебраических задач не является нестандартным приемом. Часто при решении задач, которые своими средствами не решаются или решаются очень сложно, бывает целесообразно заменить переменные тригонометрическими функциями, что значительно упрощает решение и сводит алгебраическую задачу к тригонометрической. Выбор соответствующей функции при этом зависит от вида уравнения, системы уравнений или алгебраического выражения, которое требуется упростить. Если допустимые значения переменной x определяются неравенством $|x| \le 1$, то используется замена $x = \sin\alpha$, где $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ или $x = \cos\alpha$, где $\alpha \in [0; \pi]$ в зависимости от конкретной задачи. В случае, если область определения переменной не ограничена, то используется замена $x = tg\alpha$, где $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ или $x = ctg\alpha$, где $\alpha \in [0; \pi]$.

Например, при любых действительных x и y требуется доказать справедливость неравенства $-\frac{1}{2} \le \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} \le \frac{1}{2}$.

Условие задачи не накладывает никаких ограничений на переменные x и y. Пусть $x = tg\alpha$, $y = tg\beta$, где $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $\beta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Имеем $\frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{(tg\alpha + tg\beta)(1 - tg\alpha \cdot tg\beta)}{(1+tg^2\alpha)(1+tg^2\beta)} =$

$= \sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}\sin 2(\alpha+\beta)$.

Очевидно, $-\frac{1}{2} \le \frac{1}{2}\sin 2(\alpha+\beta) \le \frac{1}{2}$.

Также метод тригонометрических подстановок эффективно используется для доказательства алгебраических тождеств. Например, требуется доказать, что

$$\frac{a-b}{1+ab} + \frac{b-c}{1+bc} + \frac{c-a}{1+ac} = \frac{a-b}{1+ab}\cdot\frac{b-c}{1+bc}\cdot\frac{c-a}{1+ac}.$$

Воспользуемся заменой $a = tg\alpha$, $b = tg\beta$, $c = tg\gamma$, где $\alpha, \beta, \gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Доказываемое тождество принимает вид:

$$tg(\alpha-\beta) + tg(\beta-\gamma) + tg(\gamma-\alpha) = \\ = tg(\alpha-\beta)\cdot tg(\beta-\gamma)\cdot tg(\gamma-\alpha).$$

Имеем $tg(\alpha-\beta) + tg(\beta-\gamma) + tg(\gamma-\alpha) =$

$= tg(\alpha-\gamma)\cdot(1 - tg(\alpha-\beta)tg(\beta-\gamma)) + tg(\gamma-\alpha) =$

$= tg(\alpha-\beta)\cdot tg(\beta-\gamma)\cdot tg(\gamma-\alpha)$.

Особое внимание стоит уделить применению метода тригонометрических подстановок при решении задач, связанных с поиском наибольшего и наименьшего значений функции. Первое, что приходит в голову при решении подобных задач, – исследовать функцию на наибольшее и наименьшее значения с помощью производной. Но часто этот привычный путь решения сопряжен со значительными техническими трудностями. Более того, в случае, когда условие задачи содержит выражение, содержащее две и более переменные, решение требует владения навыками нахождения экстремума функции многих переменных.

Например, требуется найти наибольшее и наименьшее значение выражения $\frac{3xy - 4x^2}{x^2 + y^2}$.

Пусть $x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$, где $r \in R$, $\alpha \in (0; 2\pi]$. Тогда $A = \frac{3xy - 4x^2}{x^2+y^2} =$

$= \frac{3r^2 \sin\alpha\cos\alpha - 4r^2\cos^2\alpha}{r^2\cdot(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)} = \frac{3}{2}\sin 2\alpha - 4\cos^2\alpha =$

$= \frac{3}{2}\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha - 2 = \frac{5}{2}\left(\frac{3}{5}\sin 2\alpha - \frac{4}{5}\cos 2\alpha\right) - 2 =$

$= \frac{5}{2}\sin(2\alpha - \varphi) - 2$, где $\cos\varphi = \frac{3}{5}$, $\sin\varphi = \frac{4}{5}$.

Следовательно, $-\frac{9}{2} \le A \le \frac{1}{2}$.

Стоит заметить, что нахождение наибольшего и наименьшего значения данной функции двух переменной методами математического анализа достаточно проблематично уже на этапе нахождения критических точек.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир. Неожиданный шаг или сто тринадцать красивых задач. Киев: Агрофирма "Александрия", 1993. – 59с.
2. П.П. Горнштейн. Тригонометрия помогает алгебре. Квант: 1989. №5, с. 68.