УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ТРЕХ ИНВАРИАНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СИММЕТРИЧНОГО ГИРОСТАТА С ДВУМЯ РОТОРАМИ

Мазнев А. В., Белоконь Т. В.

Донецкий национальный университет

Рассмотрено движение намагниченного неавтономного гиростата, который несет на себе два симметричных ротора и находится под действием потенциальных и гироскопических сил. Уравнения движения такого гиростата можно записать в виде [1]

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda}\times\boldsymbol{\omega}-\dot{\boldsymbol{\lambda}}+\boldsymbol{\omega}\times B\boldsymbol{\nu}+ \\ +\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{\nu}+\boldsymbol{\nu}\times C\boldsymbol{\nu}, \tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}}=\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\omega}. \tag{2}$$

Вектор гиростатического момента имеет вид $\boldsymbol{\lambda}=\lambda_1(t)\boldsymbol{\alpha}+\lambda_2(t)\boldsymbol{\beta},$ где $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ – постоянные в теле единичные взаимно перпендикулярные векторы, определяющие оси симметрии вращающихся роторов, функции $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$ – дифференцируемые функции времени. Уравнения (1),(2) допускают два первых интеграла

$$\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}=1,\quad (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\lambda})\cdot\boldsymbol{\nu}-2^{-1}(B\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu})=k. \tag{3}$$

Здесь $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)$ – момент количества движения тела-носителя, который связан с вектором угловой скорости соотношением $\boldsymbol{\omega}=a\boldsymbol{x}$ (a – гирационный тензор); $\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\nu}$, $\lambda_i(t)$ – переменные задачи; $\boldsymbol{s}$ – единичный вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс; B,C – постоянные матрицы третьего порядка; точкой обозначена относительная производная по времени.

Рассмотрен динамически симметричный гиростат $a=\mathrm{diag}(a_1,a_2,a_2)$, в предположении, что центр масс лежит на оси симметрии $\boldsymbol{s}=(s_1,0,0)$, а матрицы B и C имеют вид $B=\mathrm{diag}(B_1,B_2,B_3),\ C=\mathrm{diag}(C_1,C_2,C_3)$.

Поставлена задача об исследовании условий существования у уравнений (1)-(3) трех инвариантных соотношений вида

$$x_1=b_0+b_1\nu_1(t),\quad x_2=d_0+d_2\nu_2(t), \\ x_3=f_0+f_3\nu_3(t), \tag{4}$$

где b_0,b_1,d_0,d_2,f_0,f_3 – постоянные параметры, подлежащие определению.

Для того, чтобы система (1),(2) была замкнута, положим

$$\lambda_1(t)=\lambda_1\nu_1(t),\ \ \lambda_2(t)=\lambda_2\nu_2(t), \tag{5}$$

где λ_1,λ_2 - постоянные параметры, подлежащие определению.

Запишем уравнение (1) в скалярной форме, внесем в эту систему выражения (4),(5) и учтем в полученных равенствах соотношения (2). В результате получим систему равенств вида $f_1(\nu_1,\nu_2,\nu_3)=0,\quad f_2(\nu_1,\nu_2,\nu_3)=0,\quad f_3(\nu_1,\nu_2,\nu_3)=0.$ Требование того, чтобы эти равенства выполнялись для любых значений $\nu_1(t),\nu_2(t),\nu_3(t)$, приводит к условиям на параметры уравнений (1)-(3) и параметры b_0,b_1,d_0,d_2,f_0,f_3 инвариантных соотношений (4). Полученные условия являются необходимыми условиями существования инвариантных соотношений (4) у уравнений (1)-(3). При условии $d_2=f_3$ удалось показать разрешимость этой системы

$$d_0=0,\ f_0=0, \\ d_2=f_3=\frac{2(C_3-C_2)}{a_2(B_2-B_3)}, \\ \lambda_2=\frac{1}{2}(B_2-B_3), \\ b_0=\frac{2s_1(B_3-B_2)}{a_1(B_2^2-B_3^2)+4(C_3-C_2)}, \\ b_1=\frac{[(C_1-C_3)(B_2-B_3)+2(C_3-}{A} \\ \frac{-C_2][4(C_3-C_2)+a_2(B_2-B_3)+}{A} \\ \frac{+2a_2(B_1-\lambda_1)]}{A},\ \lambda_1\in R \\ A=a_2\left[a_1(B_2-B_3)^2+4(C_3-C_2)+\right. \\ \left.+2a_1B_3(B_2-B_3)\right]. \tag{6}$$

Поскольку при наличии соотношений (6) динамическое уравнение (1) становится тождеством, то для получения решения исходной системы (1),(2) необходимо проинтегрировать уравнения (2) при наличии двух первых интегралов (3). Данные исследования являются обобщением результатов, полученных в работе [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Горр Г.В., Мазнев А.В. Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. Донецк: ДонНУ, 2010. – 364 с.
2. Мазнев А.В., Белоконь Т.В. Один случай трех инвариантных соотношений в задаче о движении симметричного гиростата // Механика твердого тела. – 2014. – Вып. 44. – С. 27-33.