ПРИБЛИЖЕНИЕ СУММАМИ ФЕЙЕРА

Ровенская О.Г., Новиков О.О, Козаченко Ю.О.

Донбасский государственный педагогический университет, Славянск, Украина.

Обозначим $C^q_{\beta,\infty}$, $q\in(0;1), \beta\in R$, классы непрерывных $2\pi-$периодических функций $f(x)$, которые можно представить в виде свертки

$$f(x)=A_0+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x+t)P^q_\beta(t)dt,$$

где $P^q_\beta(t)=\sum_{k=1}^{\infty}q^k\cos(kt+\frac{\beta\pi}{2})$ – ядро Пуассона, а функции $\varphi(t)$ почти везде на периоде ограничены.

Такие классы принято называть классами интегралов Пуассона Их элементы являются сужениями на действительную ось функций аналитических в полосе $\operatorname{Im} z\le 1/q$.

Пусть $S_n(f;x)$ – суммы Фурье функции $f(x)$. Суммы Валле Пуссена функции $f(x)\in L$ определяются соотношением

$$V_{n,p}(f;x)=\frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1}S_n(f;x),$$

где p некоторое натуральное число, не превосходящее n. При $p=n$ этим соотношением задаются суммы Фейера

$$\sigma_n(f;x)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}S_n(f;x)$$

Задача приближения классов интегралов Пуассона тригонометрическими полиномами имеет свою историю. В 1946 году С.М. Никольский [1] показал, что для верхних граней уклонений частичных сумм Фурье, взятых по классам $C^q_{\beta,\infty}$, имеет место асимптотическое равенство

$$\varepsilon_n(C^q_{\beta,\infty})=\sup_{f\in C^q_{\beta,\infty}}\|S_n(f;x)-f(x)\|_C=$$

$$=\frac{8q^n}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-q^2\sin^2 u}du+O(1)\frac{q^n}{n},$$

где величина $O(1)$ не зависит от n. В 1980 году С.Б. Стечкин показал, что остаточный член в этой формуле можно записать в виде $O(1)q^n/n(1-q)$, где величина $O(1)$ равномерно ограничена по n, q.

Аналогичную задачу на классах интегралов Пуассона функций, подчиненных заданному модулю непрерывности, была решена в 2001 году А.И. Стапанцом [2]. В работе [3] для верхних граней уклонений сумм Валле Пуссена получена такая асимптотическая формула

$$\varepsilon(C^q_{\beta,\infty};V_{n,p})=\sup_{f\in C^q_{\beta,\infty}}\|V_{n,p}(f;x)-f(x)\|_C=$$

$$=\frac{4q^{n-p+1}}{p\pi(1-q^2)}+O(1)\frac{q^{n-p+1}}{p(n-p)(1-q)^3}.$$

А.С. Сердюком также было показано, что имеет место более общий результат

$$\varepsilon(C^q_{\beta,\infty};V_{n,p})=\frac{4q^{n-p+1}}{p\pi^2}K_{p,q}+$$

$$+O(1)\frac{q^{n-p+1}}{p(n-p+1)(1-q)^{s(p)}},$$

где

$$K_{p,q}=\int_0^{\pi}\frac{\sqrt{1-2q^p\cos pt+q^{2p}}}{\sqrt{1-2q\cos pt+q^2}}dt$$

и $s(1)=1$, $s(p)=3$ для $p>1$.

В работе [5] для верхних граней уклонений сумм Фейера на классе интегралов Пуассона при $\beta=1$ получена такая асимптотическая формула

$$\varepsilon(C^q_{1,\infty};\sigma_n)=\sup_{f\in C^q_{1,\infty}}\|\sigma_n(f;x)-f(x)\|_C=$$

$$=\frac{2}{n\pi}(\frac{2q}{1-q^2}+\ln\frac{1+q}{1-q})+O(1)\frac{q^n}{n(1-q)^3}.$$

Нами получено следующее утверждение

Теорема. *Пусть*

$$q\in(0;\sqrt[3]{17/27+\sqrt{11/27}}+\sqrt[3]{17/27-\sqrt{11/27}}]$$

Тогда для $n\to\infty$ *справедлива асимптотическая формула*

$$\varepsilon(C^q_{0,\infty};\sigma_n)=\sup_{f\in C^q_{0,\infty}}\|\sigma_n(f;x)-f(x)\|_C=$$

$$=\frac{4}{n\pi}(\frac{q}{1+q^2}+\arctan q)+O(1)\frac{q^n}{n},$$

где $O(1)$ *– величина, равномерно ограниченная по* n, q.

ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский С.М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1946. – т.10, №3. – С. 207-256.
2. Степанец А.И. Приближение аналитических непрерывных функций // Мат. сборник. – 2001. – Т.192, № 1. – С. 113–138.
3. Рукасов В.И. Приближение суммами Валле-Пуссена классов аналитических функций // Укр. мат. журн. – 2003. – т.55, №6. – С. 806–816.
4. Сердюк А.С. Наближення інтегралів Пуасона сумами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. – 2004. – Т.56, №1. – С. 97-107.
5. Новиков О.О., Ровенская О.Г. Приближение классов интегралов Пуассона суммами Фейера // Компьютерные исследования и моделирование. – 2015. – т. 7, №4. – С. 813–820.