ІНВАРІАНТИ ТОПОЛОГІЧНОЇ СПРЯЖЕНОСТІ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ТА НОВІ КРИТЕРІЇ ГІПЕРЦИКЛІЧНОСТІ ЛІНІЙНИХ ОПЕРАТОРІВ

Атаманюк О.Б., Атаманюк Б.В.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
Івано-Франківськ, Україна

Дослідження топологічної спряженості динамічних систем проводилося в дисертації Будніцької Т. [1], а інваріанти топологічної спряженості зокрема – в дисертації Коляди С.Ф. [2].

Означення і критерії гіперциклічних та суперциклічних операторів подано Байяртом в [3], Інгрем дослідив у [4] аналогію між дискретними зворотними динамічними системами та зворотними спектрами.

Дослідження спектральної рухомості проводилося Геворкяном в його докторській дисертації [5].

В даній роботі першому автору належить дослідження інваріантності різновидів гіперциклічності операторів при топологічному спряженні та пов'язані з цим умови, а другому автору – дослідження інваріантності різновидів спектральної рухомості при топологічних спряженнях.

В теорії апроксимацій використовуються поняття гіперциклічного, суперциклічного та поліноміально циклічного оператора. В монографії [3] Байяртом наведено деякі критерії гіперциклічності, суперциклічності та поліноміальної циклічності операторів. Ці оператори діють на нескінченновимірних сепарабельних лінійних просторах. Пропонуємо оригінальні критерії гіпер– , супер– та поліноміальної циклічності з використанням спектральної рухомості динамічних систем (або зворотних спектрів) в сенсі К. Борсука та її різновидів: апроксимативної спектральної рухомості (за наперед вибраним покриттям), категорної та еквіваріантної рухомості. Гомотопічна спектральна рухомість і тонка гомотопія дають можливість ввести гомотопічно циклічні оператори та їх критерій на основі тонкої гомотопії. Гомотопічна циклічність означає, що існує гомотопія, яка з’єднує орбіту деякої точки із всюди щільною підмножиною всього простору. А тонка гомотопічна циклічність означає, що така гомотопія може бути вибрана як завгодно близькою до тотожнього відображення.

Теорема 1 *(анонсована в [9]). При топологічному спряженні зберігається апроксимативна м’якість проекцій.*

Доведення. Нагадаємо означення: нехай $T: X_{i+1} \to X_i$ – проекція зворотної системи $\{X_i, p_{ij}\}$, тут ми позначимо $p_{ij} = T$ для зручності запису.

Тоді апроксимативна м'якість T означає, що $\forall\omega \in \mathrm{Cov}(X_i)$, для будь-якого замкнутого $A \subset B$, та для будь-яких двох відображень $g: A \to X_{i+1}$ та $h: B \to X_i$ з умови $T \circ g = h \circ i$ випливає, що існує відображення $\psi: B \to X_{i+1}$ таке, що 1) $\psi \circ i = g$, 2) $(T \circ \psi, h) \prec \omega$, тобто відображення ψ ділить діаграму на два комутативні трикутники, один з яких строго комутативний, а інший – квазікомутативний. Вписаність тут означає, що обидва образи відображень одночасно належать деякому елементу покриття ω. Нехай тепер $S: Y_{i+1} \to Y_i$ проекція іншої зворотної системи $\{Y_i, q_{ij}\}$, тут ми для зручності перепозначимо проекцію $q_{ij} = S$, такої системи, яка топологічно спряжена з попередньою системою $\{X_i, p_{ij}\}$,тобто існує гомеоморфізм $\pi = \{\pi_{1,2}\}$ між системами такий, що $\pi_1: X_i \to Y_i, \pi_2: X_{i+1} \to Y_{i+1}$ – обидва гомеоморфізми і виконується рівність

$$S \circ \pi_2 = \pi_1 \circ T \qquad (*)$$

Треба довести апроксимативну м'якість проекцій S. Для цього строго за означенням зафіксуємо довільне відкрите покриття $U \in \mathrm{Cov}(Y_i)$, та будь-яку замкнуту підмножину $A \subset B$ і два довільні відображення G, H такі, що $G: A \to Y_{i+1}, H: B \to Y_i$, для яких виконується умова $S \circ G = H \circ i$.

Доведемо, що тоді існує відображення $\Psi: B \to Y_{i+1}$ таке, що виконуються наступні рівності: 1) $\Psi \circ i = G$ та 2) $(S \circ \Psi, H) < U$, тобто Ψ має ділити велику діаграму на два комутативні трикутники один строго комутативний, а інший – квазікомутативний. Будуємо Ψ наступним чином. Нехай $\omega = \pi_1^{-1}(U)$ – покриття простору X_i, яке одержане з відповідного покриття U простору Y_i застосуванням оберненого гомеоморфізму π_1^{-1}. Далі, задаємо відображення $g = \pi_2^{-1} \circ G, h = \pi_1^{-1} \circ H$, тоді $T \circ g = T \circ \pi_2^{-1} \circ G$, застосуємо рівність (*) і отримаємо $\pi_2^{-1} \circ S \circ G = \pi_1^{-1}$, отже, $T \circ g = h \circ i$. Далі, маючи комутативність великої діаграми, застосуємо апроксимативну м'якість проекції T ,яка дана за умовою. Зокрема, для $\omega = \pi_1^{-1}(U)$ з умови $T \circ g = h \circ i$ випливає, що існує відображення $\psi: B \to X_{i+1}$ для якого виконуються наступні рівності: 1) $\psi \circ i = g$ та 2) $(T \circ \psi, h) < \omega$. Застосуємо топологічну спряженість (*): $S \circ \pi_2 = \pi_1 \circ T$, тоді $\pi_1(\omega) = \pi_1(\pi_1^{-1}(U)) = U$, бо π_1 – гомеоморфізм. Задаємо Ψ формулою: $\Psi = \pi_2(\psi)$. За побудовою g та h маємо: $\pi_2(g) = G$ та $\pi_2(h) = H$.

Залишилося перевірити, що побудована діагональ Ψ ділить велику діаграму на два комутативні трикутники. Для цього застосуємо π_2 та π_1 до двох трикутників: (1) комутативного $\psi \circ \mathrm{i} = \mathrm{g}$ та квазікомутативного трикутника $(\mathrm{T} \circ \psi, \mathrm{h}) < \omega$. Одержимо $\pi_2(\psi \circ \mathrm{i}) = \pi_2(\mathrm{g})$, відси випливає, що $\Psi \circ \mathrm{i} = \mathrm{G}$, а також $\pi_1(\mathrm{T} \circ \psi, \mathrm{h}) < \pi(\omega)$, $(\pi_1 \circ \mathrm{T} \circ \psi, \pi_1(\mathrm{h})) < \pi_1(\pi_1^{-1}(\mathrm{U}))$; далі застосуємо рівність (*) $(\mathrm{S} \circ \Psi, \mathrm{H}) < \mathrm{U}$. Ці дві умови (1) $\Psi \circ \mathrm{i} = \mathrm{G}$ та (2) $(\mathrm{S} \circ \Psi, \mathrm{H}) < \mathrm{U}$ дають нам строгу комутативність одного та квазікомутативність іншого трикутника, а це означає, що S – апроксимативно м’яке відбраження. Теорема 1 доведена.

Теорема 2 *(анонсовано в [11]). Якщо* $\mathrm{f} : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *та* $\mathrm{g} : \mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$ – *апроксимативно м’які відображеня, то їх композиція* $\mathrm{g} \circ \mathrm{f} : \mathrm{X} \to \mathrm{Z}$ *теж буде апроксимативно м’яким відображенням.*

Доведення. Нехай $\omega \in \mathrm{Cov}(\mathrm{Z})$, $\gamma * \succ \omega$ – зірчато вписане, $\gamma \in \mathrm{Cov}(\mathrm{Z})$. Нехай A – замкнута підмножина B. Виберемо два довільні відображення $\mathrm{h} : \mathrm{A} \to \mathrm{X}$ та $\chi : \mathrm{B} \to \mathrm{Z}$, які замикають до комутативності діаграму $\chi \circ \mathrm{i} = \mathrm{g} \circ \mathrm{f} \circ \mathrm{h}$. Потрібно довести, що існує відображення $\phi : \mathrm{B} \to \mathrm{X}$ таке, що виконуються дві умови: 1) $\phi \circ \mathrm{i} = \mathrm{h}$ та 2) $(\mathrm{g} \circ \mathrm{f} \circ \phi, \chi) < \omega$. Розглянемо відображення δ, $\delta = \mathrm{f} \circ \mathrm{h}$ за побудовою, тоді маємо комутативність наступної діаграми $\mathrm{g} \circ \delta = \chi \circ \mathrm{i}$, звідки за умовою апроксимативної м’якості $\mathrm{g} : \mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$ випливає, що існує відображення $\psi : \mathrm{B} \to \mathrm{Y}$, яке ділить дану діаграму на два комутативні трикутники: 1) $\psi \circ \mathrm{i} = \delta$, та 2) $(\mathrm{g} \circ \psi, \chi) < \gamma$. Першу комутативність можна записати ширше: $\psi \circ \mathrm{i} = \mathrm{f} \circ \mathrm{h}$. Використаємо апроксимативну м'якість відображення $\mathrm{f} : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$, за якою існує відображення $\phi : \mathrm{B} \to \mathrm{X}$ таке, що $\phi \circ \mathrm{i} = \mathrm{h}$ та $(\mathrm{f} \circ \phi, \psi) < \alpha$, де $\alpha = \mathrm{g}^{-1}(\gamma) \in \mathrm{Cov}(\mathrm{Y})$. Застосуємо до останньої нерівності відображення g і одержимо $(\mathrm{g} \circ \mathrm{f} \circ \phi, \mathrm{g} \circ \psi) < \mathrm{g}(\alpha) = \gamma$. З іншої сторони у нас була нерівність $(\mathrm{g} \circ \psi, \chi) < \gamma$, а також за побудовою γ була зірчата вписаність $\gamma * \succ \omega$. Тому, об'єднуючи дані дві нерівності, ми одержимо $(\mathrm{g} \circ \mathrm{f} \circ \phi, \chi) < (\mathrm{g} \circ \mathrm{f} \circ \phi, \mathrm{g} \circ \psi) + (\mathrm{g} \circ \psi, \chi) < \gamma + \gamma < \omega$. Справді, оскільки існує $\mathrm{W}_1 \in \gamma$, яке містить $\{\mathrm{g} \circ \mathrm{f} \circ \phi(\mathrm{b}), \mathrm{g} \circ \psi(\mathrm{b})\}$ та $\mathrm{W}_2 \in \gamma$, яке містить $\{\mathrm{g} \circ \psi(\mathrm{b}), \chi(\mathrm{b})\}$, та із зірчатої вписаності $\gamma * \succ \omega$ випливає, що існує окіл W, який містить $\mathrm{W}_1 \cup \mathrm{W}_2$, отже, W містить обидва образи $\mathrm{g} \circ \mathrm{f} \circ \phi(\mathrm{b})$ та $\chi(\mathrm{b})$, це і дає нам близькість $(\mathrm{g} \circ \mathrm{f} \circ \phi, \chi) < \omega$. Цим самим теорема про композицію апроксимативно м'яких відображень доведена.

Зауважимо, що при топологічному спряженні дискретних неавтономних спектрально–рухомих зворотних динамічних систем зберігається аппроксимативна м'якість орбіт. Це випливає із попередніх двох теорем.

Теорема 3 *(анонсована у [8]). Якщо дві динамічні системи* (X,T) *та* $(Y,S)-$ *напівспряжені нерозтягуючим фактор–відображенням* π *, то з умови* $T \in \mathrm{Helder}(\alpha)$ *випливає* $S \in \mathrm{Helder}(\alpha)$.

Доведення. Нагадаємо означення: (1) Степенем неперервності називається $\omega_f(t) = \sup\{d(f(x), f(y)) : (x,y) \in X, d(x,y) \le t\}$,

(2) Якщо $\omega_f(t) \le Ct^{\alpha}$ для деякого $\alpha > 0$, то f називається відображенням Гьольдера і позначається $f \in \mathrm{Helder}(\alpha)$. При $\alpha = 1$ маємо відображення Ліпшиця. Нехай $T \in \mathrm{Helder}(\alpha)$. Звідси випливає, що $\omega_T(t) \le Ct^{\alpha}$ для деякого $\alpha > 0$ та $C > 0$.

За означенням напівспряженості динамічних систем існує $\pi : X \to Y$ таке, що $S \circ \pi = \pi \circ T$, де π – нерозтягуюче фактор–відображення. Тоді $\omega_S(t) = \sup\{d(S(u), S(v)) : (u,v) \in Y, d(u,v) \le t\}$. Нехай $u = \pi(x)$, $v = \pi(y)$. Тоді $S(u) = S(\pi(x)) = \pi \circ T(x)$, $S(v) = S(\pi(y)) = \pi \circ T(y)$. Тоді $d(S(u), S(v)) = d(\pi \circ T(x), \pi \circ T(y)) \le d(T(x), T(y)) \le \omega_T(t)$. Звідси випливає, що $\omega_S(t) = \sup\{d(S(u), S(v)) \le \omega_T(t) \le Ct^{\alpha}\}$. Отже, $\omega_S(t) \le Ct^{\alpha}$. Звідси випливає, що $S \in \mathrm{Helder}(\alpha)$. Теорема 3 доведена.

Теорема 4 *(анонсована в[17], [20)]). Властивість SCU (сильної* $C-$ *універсальності) зберігається при топологічному спряженні дискретних неавтономних динамічних систем.*

Доведення. 1) Нехай дано дві динамічні системи (X,T) та (Y,S), які топологічно спряжені. Нехай відображення $T : X \to X'$ задовольняє умову SCU. За означенням T задовольняє умову SCU тоді і тільки тоді, якщо для будь-якого покриття $\omega \in \mathrm{Cov}(X')$, для будь-якого замкнутого $A \subset B$, для будь-якого $Z-$ вкладення $g : A \subset Y$, для будь-якого відображення $h : B \to X'$ з комутативності великої діаграми $T \circ g = h \circ i$ випливає, що існує $Z-$ вкладення $\phi : B \to X$ таке, що (1) $\phi \circ i = g$, (2) $(T \circ \phi, h) < \omega$. Треба довести, що $S : Y \to Y'$ задовольняє умову SCU. Зафіксуємо будь-яке покриття $U \in \mathrm{Cov}(Y')$. Вкладення $A \subset B$ уже вибрано. Зафіксуємо будь–яке $Z-$ вкладення $G : A \subset Y$ та будь-яке відображення $H : B \to Y'$. Нехай велика квадратна діаграма комутативна: $S \circ G = H \circ i$. Треба побудувати відображення $\Phi : B \to Y$, яке би задовольняло три наступні умови: 1)

$\Phi \circ i = G$, 2) $(S \circ \phi, H) < U$, 3) Φ має бути $Z-$ вкладенням. Задаємо відображення $g : A \to B$ за формулою $g = \pi_2^{-1} G$. Звідси випливає, що $G = \pi_2(g)$, ми одержимо, що g також $Z-$ вкладення, оскільки π_2 – гомеоморфізм, а при гомеоморфізмі властивість Z зберігається. Так само задаємо відображення $h = \pi_1^{-1}(H) \Leftrightarrow H = \pi_1(H)$, оскільки π_2 – гомеоморфізм. Нехай $\omega = \pi_1^{-1}(U)$. Доведемо, що права квадратна діаграма комутативна: $T \circ g = h \circ i$.

Справді, $T \circ g = T \circ \pi_2^{-1}(G) = \pi_1^{1} \circ S(G) = \pi_1^{-1} \circ H \circ i = h \circ i$. За умовою T – SCU , з комутативності правого квадрата $T \circ g = h \circ i$ випливає, що існує Z – вкладення $\phi : B \to X$, яке ділить квадратну діаграму на два комутативні трикутники: $\phi \circ i = g$ (строга комутативність) та $(T \circ \phi, h) < \omega$, де ω вибрано за побудовою так: $\omega = \pi_1^{-1}(U)$ тоді і тільки тоді, коли $U = \pi_1(\omega)$. Задаємо відображення $\Phi = \pi_2(\phi)$. Оскільки $\phi -$ $Z-$ вкладення, а π – гомеоморфізм, то Φ також $Z-$ вкладення. Доведемо, що Φ ділить комутативний квадрат $S \circ G = H \circ i$ на два комутативні трикутники: $\Phi \circ i = G$ та $(S \circ \Phi, H) < U$. Справді, $\Phi \circ i = \pi_2(\phi) \circ i = \pi_2(g) = G$. Далі, квазікомутативність $(S \circ \Phi, H) < U$ одержуємо із квазікомутативності $(T \circ \phi, h) < \omega$ застосуванням до обох частин відображення π_1. Одержимо $(\pi_1(T) \circ \phi, \pi_1(h)) = (S \circ \pi_2(\phi), H) = (S \circ \Phi, H) < \pi_1(\omega) = U \in \mathrm{Cov}(Y')$ Отже, проекція S також задовольняє умову SCU. Теорема 4 доведена.

Теорема 5 *(анонсована в [10]). Кожний суперциклічний оператор буде гомотопічно циклічним.*

Доведення. Суперциклічність оператора означає топологічну транзитивність проективної орбіти: $\{\lambda \cdot \mathrm{Orb}(T, x) : \lambda \in R\}$. Якщо брати $\lambda \in N$, то досить довести гомотопність усіх орбіт між собою та всюди щільність гомотопії $H : X \times [0,1]$, яка з'єднує орбіту $\mathrm{Orb}(T, x)$ із усіма орбітами $\lambda \cdot \mathrm{Orb}(T, x)$ для $\lambda \in N$. Будь-які дві сусідні орбіти з'єднуються гомотопією H_n на відрізку $\left[\frac{2^n - 2}{2^n}, \frac{2^n - 1}{2^n}\right]$. А далі, "зшиваючи" такі гомотопії по неперервності на стику областей визначення, ми задаємо таким чином гомотопію H на всьому відрізку $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2^n - 2}{2^n}, \frac{2^n - 1}{2^n}\right] = [0,1]$, бо довжина кожного такого відрізка дорівнює $\frac{1}{2^n}$. Отже, $H(x, t)$ задається так: $H(x,t)=\{H_n | X\times\Delta_n \in N\}$, тут $\Delta_n=\left[\frac{2^n-2}{2^n},\frac{2^n-1}{2^n}\right]$. Всюди щільність $H(X\times[0,1])$ випливає із суперциклічності оператора T, тобто із всюди щільності в просторі X такої множини $\{\lambda\cdot T^n(x); n\in N,\lambda\in K\}$. Нехай $H_n=(at+b)\cdot Orb(T,x)$. Знайдемо явний вигляд H_n. Маємо $(at+b)\left(t=\frac{2^n-2}{2^n}\right)=n$, тобто $a\cdot\left(\frac{2^n-2}{2^n}\right)+b=n$, звідси $a\cdot(2^n-2)+b\cdot 2^n=n\cdot 2^n$. Далі, при $t=\frac{2^n-1}{2^n}$ маємо $a\cdot(2^n-1)+b\cdot 2^n=2^n\cdot(n+1)$. Розв'яжемо систему з двох рівнянь: $(a+b)\cdot 2^n=2a+n\cdot 2^n$ та $(a+b)\cdot 2^n=a+(n+1)\cdot 2^n$. Звідси випливає, що $2\cdot a+n\cdot 2^n=a+n\cdot 2^n=a+n\cdot 2^n+2^n$. Звідси $a=2^n$ та $(a+b)\cdot 2^n=2a+n2^n$; $(a+b)\cdot 2^n=2\cdot 2^n+n\cdot 2^n=(n+2)\cdot 2^n$; $a=2^n$, $a+b=n+2$, $b=2+n-2^n\Rightarrow H_n=at+b=2^n\cdot t+(2+n)-2^n=2^n\cdot(t-1)+2+n$ Тоді $H_n(x,t)=[2^n\cdot(t-1)+(2+n)]\cdot Orb(T,x)$. Перевіримо неперервність на стику областей визначення. Нехай $t_1=\frac{2^n-2}{2^n}$, тоді $H_n(x,t_1)=\left[\frac{2^n(-2)}{2^n}+2+n\right]\cdot Orb(T,x)=n\cdot Orb(T,x)$. Далі, при $t_2=\frac{2^n-1}{2^n}$ одержимо

$$H_n(x,t_2)=H_n\left(x,\frac{2^n-1}{2^2}\right)=\left[2^n\left(\frac{-1}{2^n}\right)+2+n\right]\cdot\ \cdot Orb(T,x)=(n+1)\cdot Orb(T,x).$$

Зокрема, при $n=1$ маємо $H_1(x,0)=(a\cdot 0+b)\cdot Orb(T,x)=1\cdot Orb(T,x)$. $\Rightarrow a\cdot 0+b=1\Rightarrow b=1$. $H_1(x,1/2)=(a(1/2)+b)\cdot Orb(T,x)=2\cdot Orb(T,x)$. Звідси $a=2$. $H_1(x,t)=(2t+1)\cdot Orb(T,x)$. При $t=0$, $H_1(x,0)=Orb(T,x)$. При $t=1/2$ маємо $H_1(x,1/2)=2\cdot Orb(T,x)$.

Отже, формулу $H_n(x,t)$ можна задати методом математичної індукції: $H_n(x,t)=[2^n\cdot(t-1)+(n+2)]\cdot Orb(T,x)$ на будь-якому відрізку $\Delta_n=\left[\left[\frac{2^n-2}{2^n}\right],\left[\frac{2^n-1}{2^n}\right]\right]$, а тоді $H(x,t)=\{H_n(x,t) | X\times\Delta_n, n\in N\}$, причому сукупність усіх $\{\Delta_n : n\in N\}$ утворює відрізок $[0,1]$. Гомотопія $H: X\times[0,1]\to X$ побудована. Зауважимо, що кожний гіперциклічний оператор теж буде гомотопічно циклічним. Більше того, він буде тонко гомотопічно циклічним, тобто гомотопію можно вибрати як завгодно близькою до тотожнього відображення. Цим самим завершується доведення теореми 5.

Теорема 6 *(анонсована в [10]). Існує топологічне спряження, яке переводить суперциклічний оператор, що діє на сепарабельному гільбертовому просторі в гомотопічно циклічний оператор, який діє на компактному метризовному просторі.*

Доведення. За теоремою 2.27 із [3] існує гіперциклічний оператор T, який діє на сепарабельному гільбертовому просторі Y і має таку властивість: для будь-якого компактного метризовного простору X та неперервного відображення $f: X \to X$ існує топологічне спряження $\pi: X \to B$ (а значить існує гомеоморфізм $h = \pi^{-1}: B \to X$ на деяку підмножину B сепарабельного гільбертового простору Y таке, що для суперциклічного оператора $S = T/B: B \to B$ комутативною буде наступна діаграма: $f \circ h = h \circ S$, тобто h буде топологічним спряженням. Згадаємо, що кожний гіперциклічний оператор теж буде гомотопічно циклічним при тривіальній гомотопії. За теоремою 4 для суперциклічного оператора $S = T/B$ існують гомотопії $H_k: B \times \Delta_k \to B$, які з'єднують орбіти $\left\{kS^n, n \in N, k \in R\right\}$ та $\left\{(k+1)S^n, n \in N, k \in R\right\}$. Тоді гомотопія H задається як в теоремі 4: $H = \left\{H_n \left| B \times \Delta_n \right.\right\}$. Тоді гомотопічний образ $H(B \times [0,1])$ буде всюди щільним в B тому, що за означенням суперциклічного оператора $S: B \to B$ сімейство $\left\{k \cdot S^n(y), k \in N, n \in N\right\}$ є всюди щільним в B. Задаємо за означенням $G(x,t) = h \circ H(\pi \circ f(x), t): X \times [0,1] \to X.$ Побудована гомотопія G реалізує гомотопічну циклічність на просторі X. Вона зв'язує орбіту $\left\{f^n(x): n \in N\right\}$ та всюди щільний образ в X тому, що всюди щільність є інваріантом при топологічному спряженні h, а оператор $S = T/B$ був суперциклічним на множині B і за теоремою 5 – гомотопічно циклічним. Теорема 6 доведена.

Теорема 7. *Кожний гіперциклічний оператор буде тонко гомотопічно циклічним.*

Доведення. За теоремою 5 із суперциклічності оператора випливає його гомотопічна циклічність. Суперциклічність оператора означає гіперциклічність його проективної орбіти, Але для гіперциклічних операторів проективна орбіта співпадає із звичайною орбітою,яка всюди щільна у всьому просторі, отже кожний гіперциклічний оператор буде гомотопічно циклічним. Крім того, тонка гомотопічна циклічність оператора означає, що існує орбіта, яка апроксимативно близька за будь-яким наперед заданим відкритим покриттям до такої орбіти, що є всюди щільною в усьому просторі, а із всюди щільності апроксимативна близькість до тотожнього за довільним відкритим покриттям якраз і випливає; останнє дає нам тонку гомотопічну циклічність оператора. Теорема 7 доведена.

Зауважимо, що надалі ми будемо користуватися термінологією Геворкяна [5], в якій подається розширене означення спектральної рухомості, а також використовуємо означення К.Борсука шейпового домінування.

Означення [5]. Зворотний спектр $\mathrm{ass}X = \left\{X_{\alpha}, p_{\alpha\beta}, A\right\}$ називається спектрально рухомим відносно простору Y, якщо $\forall \alpha \in A$ існує $\beta \geq \alpha, \beta \in A$ таке, що $\forall \gamma \geq \alpha, \gamma \in A$ і для будь-якого відображення $f : Y \to X_B$ існує таке відображення $R : Y \to X_{\gamma}$, що виконується рівність: $p_{\alpha\beta} \circ f = p_{\alpha\beta} \circ R$.

Різновидами спектральної рухомості (анонсовано в [6–7], [10], [22], [23]) є наступні: 1) апроксимативна спектральна рухомість – ASM, 2) гомотопічна спектральна рухомість – GSM, 3) тонка гомотопічна спектральна рухомість – TGSM.

Теорема 8. *Якщо* $\mathrm{Sh}X \leq \mathrm{Sh}Y$*, причому простір* Y *має одну із вищеназваних видів спектральної рухомості , то такого ж виду спектральну рухомість буде мати і простір* X.

В [6], [12], [23] і [24] доведено збереження при топологічних спряженнях таких різновидів спектральної рухомості: категорної рухомості, еквіваріантної рухомості та категорної рухомості Мардешича.Збереження спектральної рухомості при шейповому домінуванні анонсовано в [16]

Теорема 9. *При топологічному спряженні інваріантами є гіперциклічність оператора, суперциклічність оператора, поліноміальна циклічність оператора, гомотопічна циклічність оператора, тонка гомотопічна циклічність оператора.*

Для ***доведення*** досить зауважити, що оскільки різновиди спектральної рухомості входять останнім третім пунктом у критерії гіперциклічності , суперциклічності та поліноміальної циклічності (Байярт [3], (спрощений випадок ,коли співпадають індекси)), то заміною пункта (3) в усіх цих критеріях на спектральну рухомість та її різновиди, ми одержуємо нові критерії гіперциклічності, суперциклічності та поліноміальної циклічності операторів.

Інваріантність при топологічних спряженнях різних видів спектральної рухомості породжує інваріантність різних видів гіперциклічності, суперциклічності та поліноміальної циклічності операторів при топологічних спряженнях.

Основні результати даної статті анонсовано в [6–24].

ЛІТЕРАТУРА

1. Будницька Т.В. Топологічна спряженість відображень. – Рукопис. Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.04 – геометрія та топологія. Інститут математики НАН України, Київ, 2009.

2. Коляда С.Ф. Топологічна динаміка: мінімальність, ентропія та хаос. – Дисертація доктора фіз.-мат. наук. Київ. – 2004. – 339с.

3. Frederic Bayart, Etienne Matheron. Dynamics of linear operators. Cambridge tracts in mathematics. – 2009.

4. W.T.Ingram.Inverse limits and dynamical systems.Open problems in topology II. Edited by Elliott Pearl. Elsevier. – 2007. – 763p.

5. Геворкян П.С. Обобщенная теория шейпов и подвижность непрерывных групп преобразований. Диссерт. доктора физ.-мат. наук. Москва. – 2001. – 212 С.

6. Атаманюк О.Б. Нова характеризація поліноміально циклічних операторів та збереження екваріантної рухомості при топологічному спряженні. Збереження категорної рухомості при топологічному спряженні дискретних неавтономних зворотних динамічних систем. // Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях. Тез. докл. междунар. конф. Харьков: «Апостроф». – 2011. – С.136–137.

7. Атаманюк О.Б. Гомотопічно циклічні оператори. // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу". Тези доповідей . – 2011. – С. 24– 29.

8. Атаманюк О.Б. Збереження відображення Гьольдера при напівспряженні нерозтягуючими фактор–відображеннями. // Всеукраїнський науковий семінар "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу". Тези доповідей. С.19– 20.

9. Атаманюк О.Б., Атаманюк Б.В. Апроксимативна м'якість спектрально рухомих орбіт динамічних систем. // Всеукраїнський науковий семінар "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" – 2010. – С.19.

10. Atamanyuk O. B. The homotopic cyclicness of compact metric spaces as image under the acting of topological conjugation on supercyclic linear spaces. // International Conference on Functional Analysis dedicated to the 90-th anniversary of V.E. Lyantse. – 2010. – P. 19.
11. Атаманюк О.Б. Збереження геометричних властивостей орбіт дискретних неавтономних зворотних спектрально рухомих динамічних систем. Тринадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука. – 2010. – С. 48.
12. Atamanyuk O.B., Atamanyuk B.V. The movability as invariant under the topological conjugated of nonautonomic discrete dynamic systems. // Дванадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука. – 2008. – С. 492.
13. Атаманюк О.Б. Апроксимативне підняття гомотопії як інваріант топологічної спряженості обернених неавтономних дискретних динамічних систем. // IV всеукраїнська наукова конференція "Нелінійні проблеми аналізу". – 2008. – С.6.
14. Атаманюк О.Б., Атаманюк Б.В. Збереження різних видів м'якості при топологічному спряженні обернених неавтономних дискретних динамічних систем. // IV всеукраїнська наукова конференція "Нелінійні проблеми аналізу". – 2008. – С. 4.
15. Атаманюк О.Б., Атаманюк Б.В. Збереження категорної рухомості при топологічному спряженні дискретних неавтономних зворотних динамічних систем. // Тези доповідей міжнародної конференції "Сучасні проблеми математики та їх застосування у природничих науках та інформаційних технологіях". Харків: Апостроф. – 2011. – С.137– 138.
16. Атаманюк О.Б., Атаманюк Б.В. Збереження спектральної рухомості монадичними функторами та шейповим домінуванням. // Міжнародна конференція "Геометрія в Одесі". Тези доповідей. – 2010. – С. 14.
17. Atamanyuk O.B. The preservation of geometric properties by diskrete nonautonomic inverse dynamical systems under the topological conjugation. // International Conference on Topology and its Applications. – 2010. – P.176.
18. Атаманюк О.Б. Геометричні інваріанти дискретних неавтономних спряжених зворотних динамічних систем. // VII Літня школа «Алгебра, топологія і аналіз». – 2010. – С. 77.
19. Atamanyuk O.B. The preservation of geometric properties by diskrete nonautonomic inverse dynamical systems under the topological conjugation. International Scientific Conference "Infinite dimensional analysis and topology". – 2009. – P.9.
20. Атаманюк О.Б., Атаманюк Б.В. Гіперпростори порядкових дуг континуальної експоненти від метричного пеановського континууму гомеоморфні гільбертовому кубу і теорема про збереження м'якості при

топологічному спряженні. // Український математичний конгрес. – 2009. http://www.imath.kiev.ua/~congress2009/Abstracts/AtamaniukB.pdf

21. Атаманюк О.Б. Геометричні інваріанти топологічно спряжених дискретних неавтономних зворотних динамічних систем. // Конференція “Функціональні методи в теорії наближень і теорії операторів ІІІ”, присвячена пам'яті В.К. Дзядика. – 2009. – С. 10– 12.

22. Атаманюк О.Б. Нова характеризація поліноміально циклічних операторів та збереження еквіваріантної рухомості при топологічних спряженнях. // Тези доповідей міжнародної конференції “Сучасні проблеми математики та їх застосування в природничих науках та інформаційних технологіях”. Харків: Апостроф. – 2011. – С.136– 137.

23. Атаманюк О.Б.,Атаманюк Б.В. Різновиди спектральноЇ рухомості та Їх інваріантність при топологічному спряженні. // Тези доповідей міжнародної конференції “Сучасні проблеми математики та їх застосування в природничих науках та інформаційних технологіях”. Харків: Апостроф. – 2011. – С.137– 138.

24. Атаманюк Б.В., Атаманюк О.Б. Розпізнавання образів за методом оптимального згортання та його інваріантність при малих деформаціях. // Четверта Міжнародна конференція TAAPSD. – 2007. – С.52– 57.